

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

ESTUDIO DE DUALIDAD TRANSMISIÓN-RECEPCIÓN EN SISTEMAS MIMO MULTIUSUARIO



PROYECTO FIN DE CARRERA

Autor: Daniel Sánchez Herrera

Tutora: Matilde Pilar Sánchez Fernández

Ingeniería de Telecomunicación





Índice

Índice	3
Tabla de Ilustraciones	5
Introducción	9
Introducción general a los sistemas MIMO	9
Compromiso entre multiplexado y diversidad	13
Canal MIMO	15
MIMO Multiusuario	17
<i>Modelo BC</i>	18
<i>Modelo MAC</i>	20
<i>Dualidad BC – MAC</i>	22
Objetivos y Estructura del Proyecto	24
Decodificadores y Precodificadores	25
Introducción a los esquemas de decodificación y precodificación	25
<i>Decodificadores</i>	26
<i>Precodificadores</i>	28
Decodificadores → Precodificadores	30
<i>Introducción al problema del procesamiento en transmisión</i>	30
<i>Filtro Adaptado</i>	31
<i>Filtro de forzado a cero</i>	32
<i>Filtro de Wiener</i>	33
Resultados del proyecto	35
Escenario	35
Resultados	36
<i>Probabilidad de error</i>	36
<i>Información mutua</i>	57
<i>Relación señal a interferencia</i>	74
Conclusiones	91
Bibliografía	95





Tabla de Ilustraciones

Ilustración 1 - Esquema de un Sistema MIMO de comunicaciones.....	9
Ilustración 2 – Comparación SER (Symbol Error Rate) para sistemas con y sin diversidad espacial [2].....	11
Ilustración 3 - Comparación capacidades sistemas MIMO, SIMO y MISO [9]	12
Ilustración 4 – $C_{out,0.01}$ en función de la SNR para un sistema MIMO con multiplexado [1]	14
Ilustración 5 – Probabilidad de error de trama en función de la SNR para un sistema MIMO con diversidad [1].....	14
Ilustración 6 – Curva de compromiso entre diversidad y multiplexado [1]	15
Ilustración 7 – Diagrama con la estructura general de bloques de un sistema MIMO [3]	15
Ilustración 8 – Diagrama con la estructura general de bloques de un sistema MIMO MAC [4]	17
Ilustración 9 – Diagrama con la estructura general de bloques de un sistema MIMO BC [4]	17
Ilustración 10 – Región de capacidad para sistema MIMO BC de dos usuarios [2].....	19
Ilustración 11 – Diagrama de bloques del modelo de canal de un sistema MIMO BC con precodificación lineal	20
Ilustración 12 – Región de capacidad para sistema MIMO MAC de dos usuarios [2] ..	21
Ilustración 13 – Diagrama de bloques del modelo de canal de un sistema MIMO MAC	22
Ilustración 14 – Representación de la dualidad de las regiones de capacidad para sistemas MIMO [2].....	23
Ilustración 15 – Esquema de bloques del filtro decodificador DFE [20]	28
Ilustración 16 – Esquema de bloques del filtro precodificador Tomlinson - Harashima [25]	30
Ilustración 17 – BER en función de la SNR en caso de usar decodificación (BPSK, $M>K$)	36
Ilustración 18 – BER en función de la SNR en caso de usar precodificación (BPSK, $M>K$)	37
Ilustración 19 – BER en función de la SNR para ambos casos (BPSK, $M>K$)	38
Ilustración 20 – BER en función de la SNR en caso de usar decodificación (BPSK, $M<K$)	38
Ilustración 21 – BER en función de la SNR en caso de usar precodificación (BPSK, $M<K$)	39
Ilustración 22 – BER en función de la SNR en ambos casos (BPSK, $M<K$).....	40
Ilustración 23 – BER en función de la SNR en caso de usar decodificación (BPSK, $M=K=8$).....	40
Ilustración 24 – BER en función de la SNR en caso de usar precodificación (BPSK, $M=K=8$).....	41
Ilustración 25 – BER en función de la SNR para ambos casos (BPSK, $M=K=8$)	42
Ilustración 26 - Evolución de la BER con el número de antenas (Wiener, BPSK).....	43
Ilustración 27 - Evolución de la BER con el número de antenas (Matched Filter, BPSK)	43
Ilustración 28 - Evolución de la BER con el número de antenas (ZF, BPSK).....	44



Ilustración 29 – BER en función de la SNR en caso de usar decodificación (QPSK, $M>K$)	45
Ilustración 30 - BER en función de la SNR en caso de usar precodificación (QPSK, $M>K$)	45
Ilustración 31 – BER en función de la SNR para ambos casos (QPSK, $M>K$)	46
Ilustración 32 - BER en función de la SNR en caso de usar decodificación (QPSK, $M<K$)	47
Ilustración 33 - BER en función de la SNR en caso de usar precodificación (QPSK, $M<K$)	48
Ilustración 34 - BER en función de la SNR para ambos casos (QPSK, $M<K$)	48
Ilustración 35 - BER en función de la SNR en caso de usar decodificación (QPSK, $M=K=8$)	49
Ilustración 36 - BER en función de la SNR en caso de usar precodificación (QPSK, $M=K=8$)	49
Ilustración 37 - BER en función de la SNR para ambos casos (QPSK, $M=K=8$)	50
Ilustración 38 - Evolución de la BER con el número de antenas (Wiener, QPSK)	51
Ilustración 39 - Evolución de la BER con el número de antenas (Matched Filter, QPSK)	51
Ilustración 40 - Evolución de la BER con el número de antenas (ZF, QPSK)	52
Ilustración 41 - Comparación métodos y equivalentes transpuestos ($M>K$, BPSK)	53
Ilustración 42 - Comparación métodos y equivalentes transpuestos ($M>K$, QPSK)	54
Ilustración 43 - Comparación métodos y equivalentes transpuestos ($M=K=5$, BPSK)	54
Ilustración 44 - Comparación métodos y equivalentes transpuestos ($M=K=5$, QPSK)	55
Ilustración 45 - Comparación métodos y equivalentes transpuestos ($M<K$, BPSK)	55
Ilustración 46 - Comparación métodos y equivalentes transpuestos ($M<K$, QPSK)	56
Ilustración 47 – Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar decodificación (BPSK, $M>K$)	57
Ilustración 48 – Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar precodificación (BPSK, $M>K$)	58
Ilustración 49 – Inf. Mutua en función de la SNR para ambos casos (BPSK, $M>K$)	58
Ilustración 50 – Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar decodificación (BPSK, $M<K$)	59
Ilustración 51 – Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar precodificación (BPSK, $M<K$)	60
Ilustración 52 - Inf. Mutua en función de la SNR para ambos casos (QPSK, $M<K$)	61
Ilustración 53 - Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar decodificación (BPSK, $M=K$)	62
Ilustración 54 - Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar precodificación (BPSK, $M=K$)	63
Ilustración 55 - Inf. Mutua en función de la SNR para ambos casos (BPSK, $M=K$)	64
Ilustración 56 - Evolución de la Inf. Mutua con el número de antenas (Wiener, BPSK)	64
Ilustración 57 - Evolución de la Inf. Mutua con el número de antenas (Matched Filter, BPSK)	65
Ilustración 58 - Evolución de la Inf. Mutua con el número de antenas (ZF, BPSK)	65
Ilustración 59 - Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar decodificación (QPSK, $M>K$)	66
Ilustración 60 - Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar precodificación (QPSK, $M>K$)	67
Ilustración 61 - Inf. Mutua en función de la SNR para ambos casos (QPSK, $M>K$)	67



Ilustración 62 - Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar decodificación (QPSK, $M < K$)	68
Ilustración 63 - Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar precodificación (QPSK, $M < K$)	69
Ilustración 64 - Inf. Mutua en función de la SNR para ambos casos (QPSK, $M < K$)	69
Ilustración 65 - Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar decodificación (QPSK, $M = K$)	70
Ilustración 66 - Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar precodificación (QPSK, $M = K$)	70
Ilustración 67 - Inf. Mutua en función de la SNR para ambos casos (QPSK, $M = K$)	71
Ilustración 68 - Evolución de la Inf. Mutua con el número de antenas (Wiener, QPSK)	72
Ilustración 69 - Evolución de la Inf. Mutua con el número de antenas (Matched Filter, QPSK)	72
Ilustración 70 - Evolución de la Inf. Mutua con el número de antenas (ZF, QPSK)	73
Ilustración 71 - Relación señal a interferencia para BPSK (Wiener, $M > K$)	74
Ilustración 72 - Relación señal a interferencia para BPSK (Matched Filter, $M > K$)	75
Ilustración 73 - Relación señal a interferencia para BPSK (ZF, $M > K$)	75
Ilustración 74 - Relación señal a interferencia para BPSK (Wiener, $M < K$)	76
Ilustración 75 - Relación señal a interferencia para BPSK (Matched Filter, $M < K$)	77
Ilustración 76 - Relación señal a interferencia para BPSK (ZF, $M < K$)	77
Ilustración 77 - Relación señal a interferencia para BPSK (Wiener, $M = K = 8$)	78
Ilustración 78 - Relación señal a interferencia para BPSK (Matched Filter, $M = K = 8$) ..	79
Ilustración 79 - Relación señal a interferencia para BPSK (ZF, $M = K = 8$)	79
Ilustración 80 - Evolución de la SIR con el número de antenas (Wiener, BPSK)	81
Ilustración 81 - Evolución de la SIR con el número de antenas (Matched Filter, BPSK)	81
Ilustración 82 - Evolución de la SIR con el número de antenas (ZF, BPSK)	82
Ilustración 83 - Relación señal a interferencia para QPSK (Wiener, $M > K$)	83
Ilustración 84 - Relación señal a interferencia para QPSK (Matched Filter, $M > K$)	83
Ilustración 85 - Relación señal a interferencia para QPSK (ZF, $M > K$)	84
Ilustración 86 - Relación señal a interferencia para QPSK (Wiener, $M < K$)	84
Ilustración 87 - Relación señal a interferencia para QPSK (Matched Filter, $M < K$)	85
Ilustración 88 - Relación señal a interferencia para QPSK (ZF, $M < K$)	85
Ilustración 89 - Relación señal a interferencia para QPSK (Wiener, $M = K = 8$)	86
Ilustración 90 - Relación señal a interferencia para QPSK (Matched Filter, $M = K = 8$) ..	87
Ilustración 91 - Relación señal a interferencia para QPSK (ZF, $M = K = 8$)	87
Ilustración 92 - Evolución de la SIR con el número de antenas (Wiener, QPSK)	88
Ilustración 93 - Evolución de la SIR con el número de antenas (Matched Filter, QPSK)	89
Ilustración 94 - Evolución de la SIR con el número de antenas (ZF, QPSK)	89



Introducción

Introducción general a los sistemas MIMO

En los últimos años ha crecido en gran medida la importancia de los servicios inalámbricos en las comunicaciones de tal forma que la demanda de tecnologías y redes que puedan proporcionar mejores capacidades y rendimientos es cada vez mayor.

De este modo, en los últimos años las investigaciones y tecnologías han ido evolucionando en busca de mayores anchos de banda, optimización de las modulaciones o sistemas de multiplexado de códigos aunque estas soluciones ofrecían opciones limitadas a lo que a ocupación eficiente del espectro electromagnético se refiere, lo que hace que su implementación práctica fuese un problema debido a lo saturado que se encuentra el mismo.

Los sistemas MIMO (*Multiple Input – Multiple Output*) surgieron como respuesta a estas limitaciones ya que, al utilizar técnicas de multiplexado en espacio, aumentan la eficiencia de uso del ancho de banda. Para ello utilizan arrays de antenas tanto en la transmisión como en la recepción de un mismo canal de información, como se puede ver en el siguiente esquema.

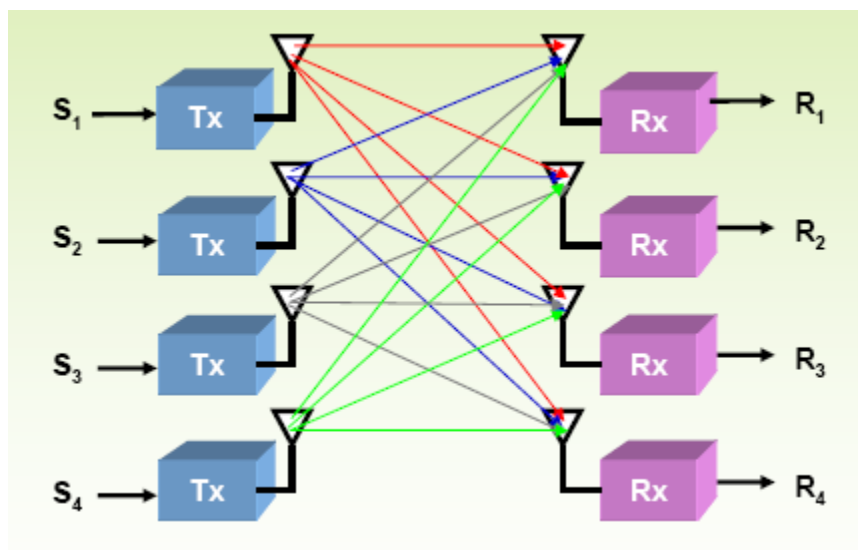


Ilustración 1 - Esquema de un Sistema MIMO de comunicaciones

Prueba de la importancia de este tipo de sistemas es el hecho de que, ya sea de forma conjunta con la modulación OFDM o de forma independiente de esta modulación, los sistemas MIMO se han convertido en pieza clave de todas las técnicas y redes de acceso inalámbrico de banda ancha como puede verse en su inclusión en estándares relevantes en este campo como son los IEEE 802.11n, correspondiente a WiFi, 802.16e ó 802.16-2004 que están asociados a redes WiMAX, el 802.20 (MBWA, *Mobile Broadband Wireless Access*) y el 802.22, grupo asociado a las redes inalámbricas para acceso



regional, o la gran aceptación e importancia que está adquiriendo en las investigaciones y estándares sobre tecnologías 3G y 4G, release 7 (HSUPA, *High Speed Uplink Packet Access*) y release 8 (UMTS, *Universal Mobile Telecommunications System*, en redes All-IP, aún en proceso) desde su incorporación por parte del 3GPP.

Sin embargo, actualmente, existen problemas abiertos para los sistemas MIMO en lo que a capacidad se refiere [3]:

1. La expresión de la capacidad del sistema bajo CDIT (*Transmitter Channel Distribution Information*) y perfecta CSIT (*Transmitter Channel State Information*) no se puede resolver con una distribución combinada de covarianza y media del canal aún cuando se trata de un sistema con una única antena en recepción.
2. Bajo condiciones de CSIR (*Receiver Channel State Information*) y CDIT perfectas la capacidad no se conoce para correlaciones espaciales generales.
3. El cálculo de la capacidad en sistemas sólo con CDIR (*Receiver Channel Distribution Information*) es un problema abierto en casi todos los casos.
4. La gran parte de los resultados obtenidos de capacidad bajo conocimiento exclusivo de la distribución del canal tanto en transmisión como en recepción son para capacidades ergódicas. Se ha comprobado que la capacidad que se alcanza en un $p\%$ del tiempo de transmisión ($C_{out,p}$) es más complicada de calcular analíticamente y genera mayor número de problemas que las capacidades ergódicas.
5. Sólo muy recientemente se está prestando atención a los entornos MIMO multiusuario.

A continuación paso a detallar los beneficios que se obtienen al utilizar sistemas MIMO:

- **Ganancia por uso de array de antenas:** como resultado del uso combinado de las señales inalámbricas transmitidas en el sistema MIMO podemos aumentar la SNR (*Signal to Noise Ratio*) que se obtiene en el lado receptor al conformar y apuntar debidamente el haz de transmisión.

Esta combinación de señales puede llevarse a cabo de dos formas diferentes, ya sea haciendo un procesamiento espacial de la información que se obtiene en la antena del lado receptor o bien con un pre-procesado en la antena transmisora de tal forma que se acondicionen las señales a transmitir para obtener dicha ganancia en recepción.

- **Ganancia por diversidad espacial:** se consigue con la combinación de múltiples copias de las señales transmitidas y propagarlas por distintos caminos. Con el uso y combinación de estas copias podremos mitigar el efecto de desvanecimiento que sufren las señales transmitidas y que es propio de los canales de los sistemas inalámbricos ya que al transmitir y recibir múltiples

copias de la información tendremos mayor probabilidad de que una de las señales transmitidas no sufra este efecto.

Cuanto mayor sea el número de antenas utilizadas en transmisión y recepción, mayor será la calidad y fiabilidad de la información recibida ya que tendremos mayor número de enlaces independientes. Es decir, si tenemos M antenas transmisoras y N antenas en recepción, tendremos un número total de $M \cdot N$ enlaces independientes, por lo que el orden de diversidad espacial de nuestro sistema será de $M \cdot N$. La gráfica siguiente muestra la probabilidad de error de símbolo para distintos valores de relación señal a ruido para un sistema sin diversidad espacial, un sistema que utiliza una configuración Alamuti 2x2 [7] y otro con una configuración MRC (*Maximum Ratio Combining*) para el mismo número de antenas como muestra de las mejoras obtenidas con el uso de la diversidad espacial para canales i.i.d y modulación BPSK.

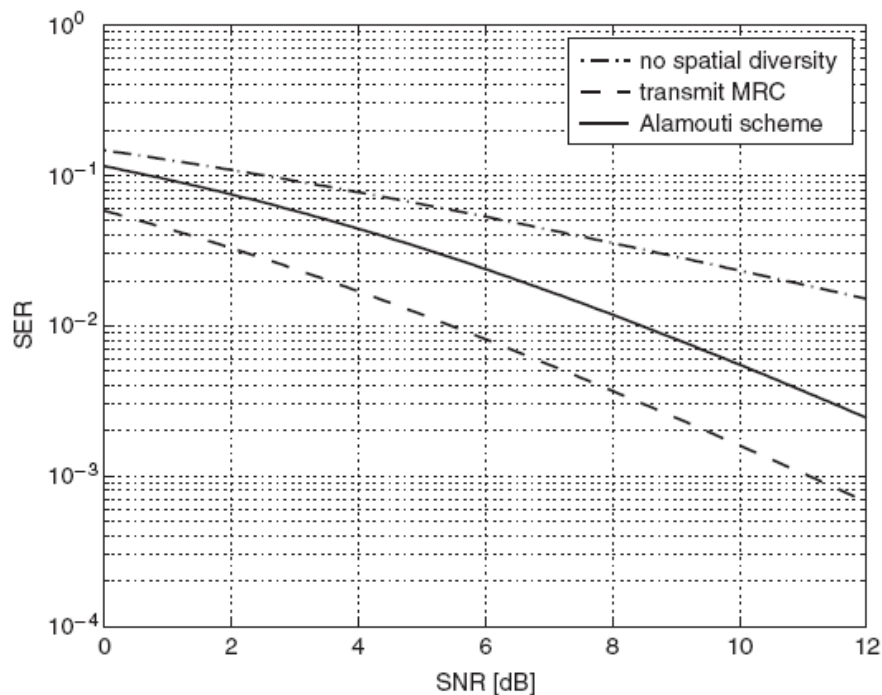


Ilustración 2 – Comparación SER (Symbol Error Rate) para sistemas con y sin diversidad espacial [2]

- **Ganancia por uso de multiplexado espacial:** los sistemas MIMO ofrecen la posibilidad de incrementar la tasa de transmisión de información ya que, a través del multiplexado espacial, podemos transmitir simultáneamente múltiples ráfagas de datos independientes dentro del mismo ancho de banda. Estas ráfagas podrán ser separadas y procesadas independientemente siempre que nos encontremos en un entorno con las condiciones apropiadas (buenas propiedades de dispersión).

De esta forma, y dado que cada una de las señales transmitidas no va a sufrir peores condiciones que si fuera una señal de un sistema SISO (*Single Input – Single Output*), la capacidad que ofrece el sistema se verá incrementada con respecto al límite de Shannon en relación con el número de ráfagas de información que puedan propagarse por el sistema.

En las ecuaciones (1) y (2) presento los límites de Shannon para la capacidad medida en bits/s de los sistemas SISO y MIMO para un único usuario donde ρ representa la relación señal a ruido del sistema, f_g el ancho de banda disponible en el enlace y M el número de antenas utilizadas para la transmisión de la señal de usuario en el sistema MIMO.

$$C_{SISO} = f_g \log_2(1 + \rho) \quad (1)$$

$$C_{MIMO} = M f_g \log_2(1 + \rho) \quad (2)$$

Este incremento será lineal con el número de antenas utilizadas tanto en transmisión como en recepción (el menor de los utilizados en caso de que el sistema no esté balanceado en número de antenas) frente a los incrementos logarítmicos que se producen con los sistemas SIMO (*Single Input – Multiple Output*) o MISO (*Multiple Input – Single Output*) y con capacidades siempre por encima del límite de Shannon del sistema SISO como se puede ver en la siguiente ilustración:

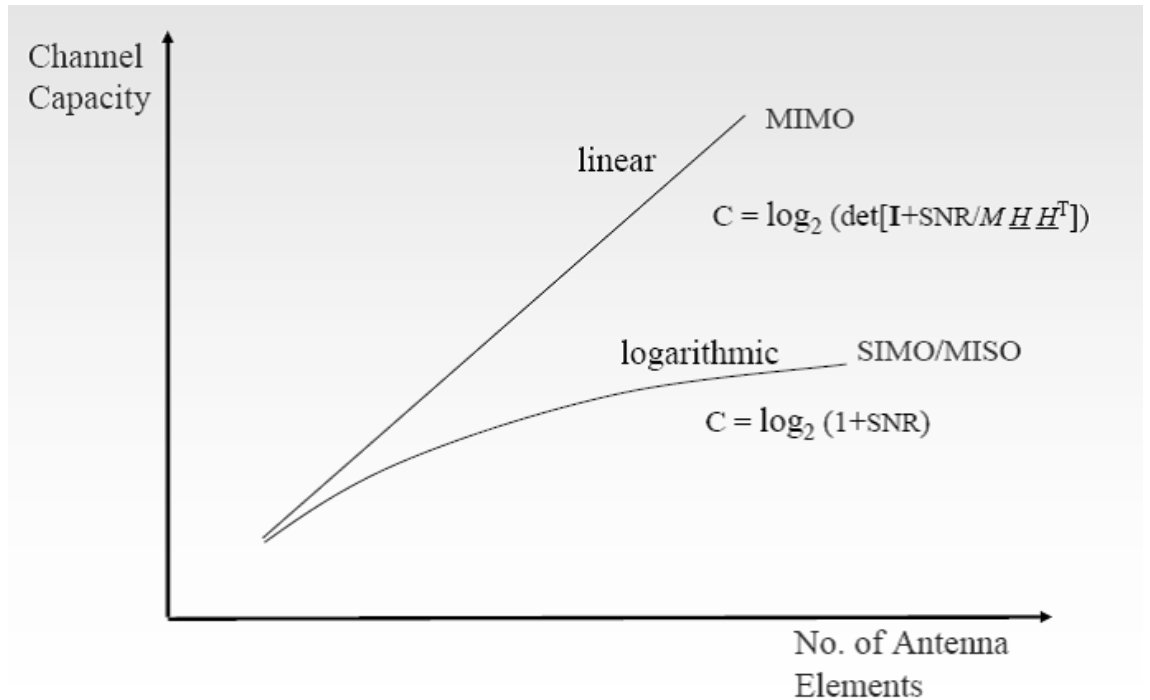


Ilustración 3 - Comparación capacidades sistemas MIMO, SIMO y MISO [9]

- **Reducción de la interferencia:** dado que las interferencias más importantes en las redes inalámbricas se deben a que los distintos usuarios de la red comparten recursos ya sea en tiempo, frecuencia o en ambos, los sistemas MIMO aplicados a entornos multiusuario pueden mitigar e incluso eliminar estas interferencias al ser capaces de utilizar la dimensión espacial para tal fin.

A pesar de la variedad e importancia de estos beneficios, la limitación que existe en los grados de libertad espaciales hace que no sea posible obtener todos estos beneficios a la vez por lo que en la práctica deben llevarse a cabo medidas de compromiso, sobre las que trataré en el siguiente punto, en la combinación de los distintos efectos en función de las funciones a las que esté destinado el sistema MIMO en cuestión.

Compromiso entre multiplexado y diversidad

En un sistema de comunicaciones inalámbrico, los efectos del canal y, en particular, los desvanecimientos pueden combatirse y hasta evitarse a través del procesado y pre-codificación de las ráfagas de información. Sin embargo, estas acciones hacen que la tasa de transmisión de información se vea disminuida por lo que a la hora de diseñar un sistema MIMO debe llegarse a una solución de compromiso entre la calidad de la información recibida, traducido en SNR y FER (*Frame Error Rate*) en recepción, y la velocidad de transmisión de la misma o, equivalentemente, un compromiso entre diversidad y multiplexado, tal y como desarrollan Zheng y Tse en [1].

Como ya he descrito anteriormente, la diversidad espacial en un sistema MIMO, al utilizar distintos caminos para un mismo enlace, reduce la probabilidad de que la información transmitida se vea afectada por las condiciones del canal pero se están utilizando varias antenas para transmitir una única ráfaga por lo que no se está optimizando la tasa de transmisión. De forma análoga, el multiplexado en espacio va a conseguir que en el mismo espectro estemos enviando distintas ráfagas por lo que estaremos optimizando la velocidad de transmisión pero ésta no tendrá protección frente a los efectos del canal por lo que la SNR en recepción será menor que usando diversidad espacial por lo que la probabilidad de error mayor en este segundo caso.

La ganancia máxima de capacidad que se puede obtener al aplicar multiplexado espacial se puede expresar como función de la SNR según la siguiente ecuación asintótica, en la que $C_{out,p}$ representa la capacidad que se alcanzaría en el sistema el p% del tiempo de transmisión determinado:

$$r_{max} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{C_{out,p}}{\log_2(\rho)} \quad (3)$$

Para un canal MIMO i.i.d con detección óptima, la ganancia máxima que se podrá conseguir será el mínimo número entre antenas en transmisión y recepción y podrá aumentar en este mismo valor por cada 3dB de SNR.

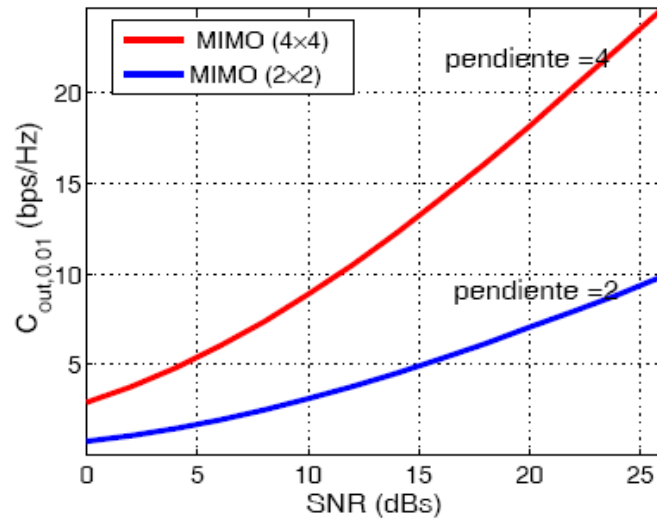


Ilustración 4 – $C_{out,0.01}$ en función de la SNR para un sistema MIMO con multiplexado [1]

La ganancia máxima por diversidad (ganancia SNR) está dada por la ecuación asintótica de la FER (identificada en la ecuación (4) con P_e en función de la SNR (ρ) y para una tasa de transmisión fija r :

$$d_{max} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\log_2(P_e(\rho, r))}{\log_2(\rho)} \quad (4)$$

La ganancia máxima por diversidad es igual al producto del número de antenas del sistema ($M \times N$) y se puede aumentar en $2^{M \times N}$ por cada 3dB de SNR.

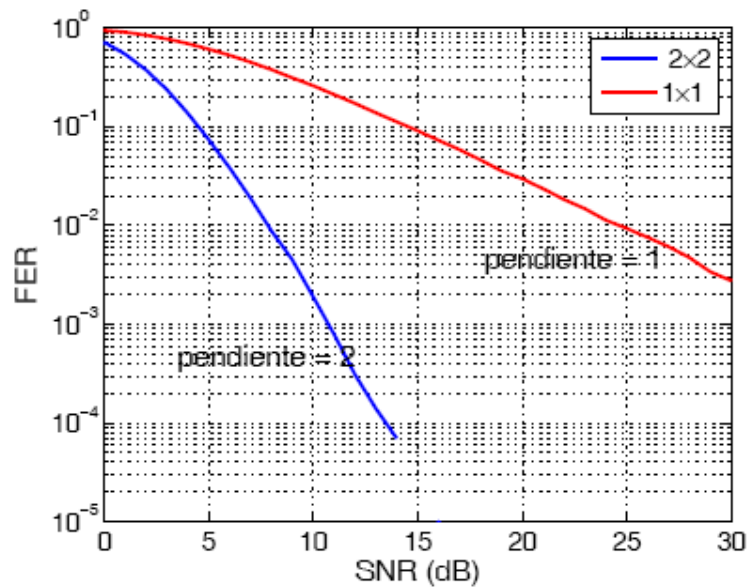


Ilustración 5 – Probabilidad de error de trama en función de la SNR para un sistema MIMO con diversidad [1]

Estas dos ganancias están interrelacionadas, por lo que como resultado obtenemos la curva de compromiso entre multiplexado y diversidad:

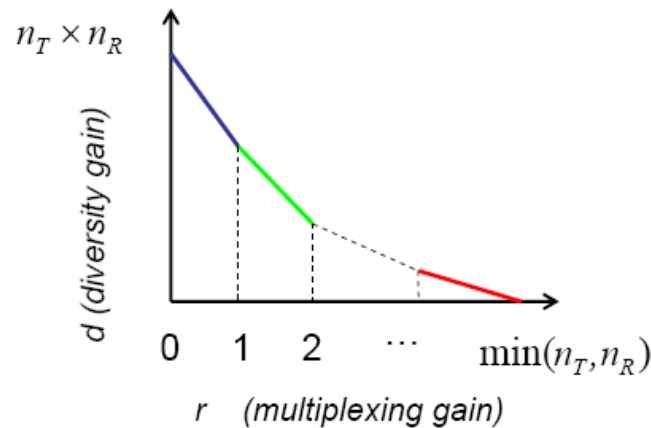


Ilustración 6 – Curva de compromiso entre diversidad y multiplexado [1]

Acorde con lo descrito anteriormente, los sistemas MIMO no sólo están compuestos por los clásicos bloques de codificación, intercalado, mapeado de constelaciones sino que también se incluyen módulos de codificación y pre-procesado espacio-tiempo para dar lugar a los beneficios anteriormente expuestos. La estructura general de los sistemas MIMO con un único usuario responde al siguiente diagrama:

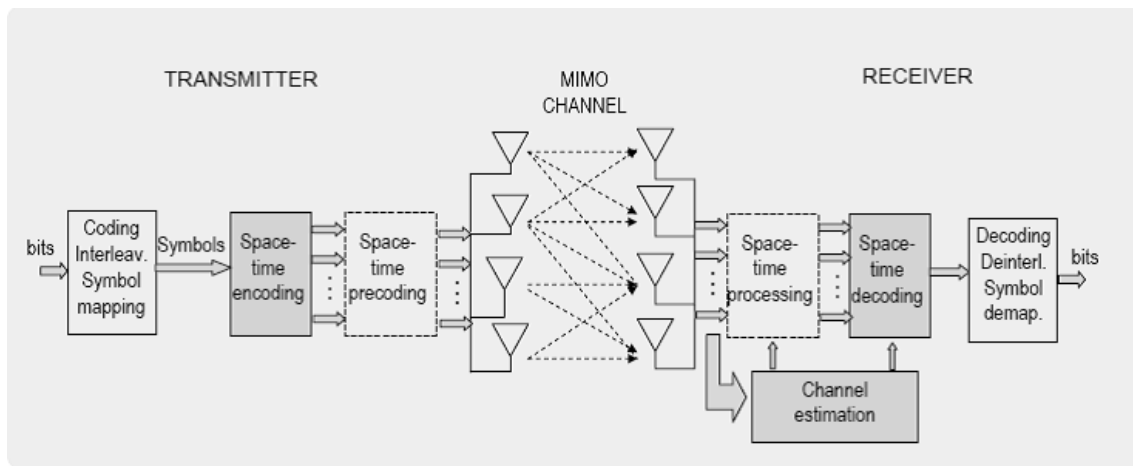


Ilustración 7 – Diagrama con la estructura general de bloques de un sistema MIMO [3]

Canal MIMO

El canal MIMO contiene gran número de enlaces de comunicación, en función de las antenas transmisoras y receptoras de las que conste el sistema, y todos y cada uno de estos enlaces utiliza la misma frecuencia para la propagación de su información de ahí que el gran reto de esta tecnología es la separación y procesamiento independiente de las ráfagas de información para cada uno de los distintos usuarios.

Respondiendo a la naturaleza de los sistemas MIMO, podríamos modelar la transmisión en este tipo de sistemas y su canal de banda estrecha (en ausencia de multitrayectos) a través de las siguientes ecuaciones, donde el número de columnas (M) va asociado al número de antenas transmisoras y el número de filas (N) al número de antenas en recepción:

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (5)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & \cdots & h_{NM} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Para los sistemas MIMO con un único usuario, podemos ver que la señal recibida \mathbf{r} (de dimensiones $N \times 1$) va a estar compuesta por las componentes de información recibidas en cada una de las antenas receptoras que, van a estar compuestas a su vez por la aportación de su enlace correspondiente (componente i del vector \mathbf{s} , de dimensiones $M \times 1$) y factores resultado de la influencia del resto de antenas transmisoras, escalados por los valores correspondientes de la matriz de canal (matriz \mathbf{H} de dimensiones $N \times M$), y del ruido aditivo \mathbf{n} (de dimensiones $N \times 1$) que este mismo introduce:

$$r_i = h_{i1}s_1 + h_{i2}s_2 + h_{i3}s_3 + \dots + h_{ii}s_i + \dots + h_{iM}s_M + n_i \quad (7)$$

Si las ecuaciones (5) y (6) respondiesen a un sistema MIMO multiusuario, suponiendo que se asigna una antena en recepción por cada usuario del sistema, podríamos decir que la señal recibida \mathbf{r} va a estar compuesta por las componentes de información para cada uno de los usuarios del sistema que, van a estar compuestas a su vez por la aportación de su usuario correspondiente (componente i del vector \mathbf{s}) y factores resultado de la influencia del resto de usuarios, escalados por los valores correspondientes de la matriz de canal (matriz \mathbf{H}), y del ruido aditivo \mathbf{n} que este mismo introduce.

Del mismo modo, el resto ráfagas de información se verán afectadas por nuestro usuario, siendo los valores h_{ij} , las ganancias de canal para los enlaces entre las antenas transmisoras j y la antena receptora i por lo que la colocación y condicionamiento de las antenas transmisoras va a ser muy importante a la hora de separar las distintas componentes recibidas y de independizar unos usuarios de otros. De esta forma, la ecuación que define a un sistema MIMO multiusuario es la misma que la de un sistema MIMO para un único usuario, sin embargo, el significado de ambas es totalmente distinto.

Una vez presentados los sistemas MIMO, pasamos a introducir el sistema MIMO sobre el que trabajaremos, el sistema MIMO multiusuario, y a enumerar y presentar sus características y peculiaridades.

MIMO Multiusuario

En estos sistemas, las múltiples antenas transmisoras y receptoras no se limitan a la información de un único usuario sino que se aprovechan para manejar información para multitud de ellos. Por tanto, en general, precisará transmitir tantas ráfagas de información como usuarios tenga el sistema.

Los dos principales modelos de canal para este tipo de sistemas MIMO son el canal MAC (*Multiple Access Channel*) o ascendente, llamado así en referencia las redes móviles en el que varios móviles envían información a un receptor, y el canal BC (*Broadcast Channel*) o descendente, en referencia también al sentido de bajada en las redes móviles en el que la estación base envía información a la red y cada móvil recibe la información completa de todos los usuarios pero decodifica y procesa exclusivamente la suya.

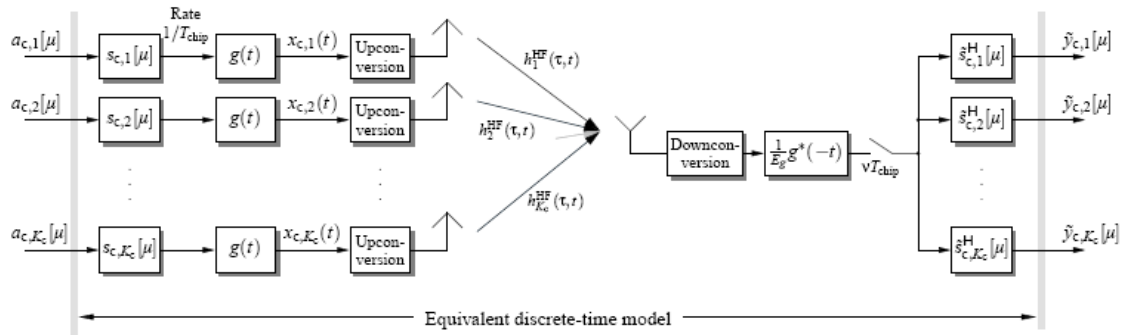


Ilustración 8 – Diagrama con la estructura general de bloques de un sistema MIMO MAC [4]

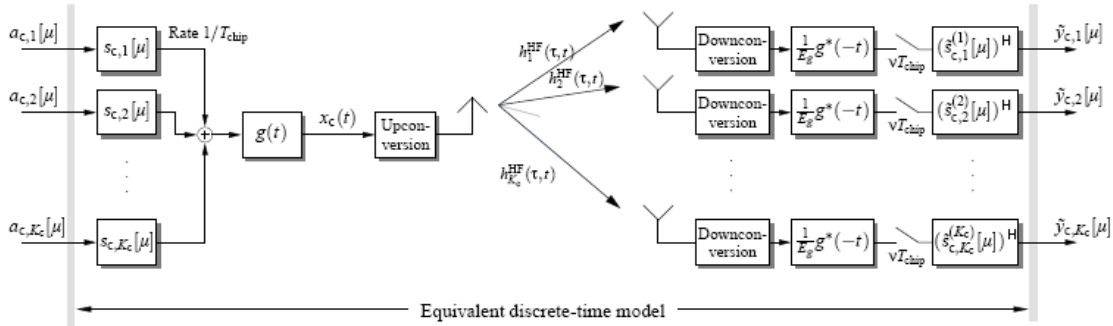


Ilustración 9 – Diagrama con la estructura general de bloques de un sistema MIMO BC [4]

Para ambos, las expresiones de la capacidad son similares a la ya expuesta para canales MIMO de un único usuario salvo por el hecho de que ahora la capacidad debe asociarse a una región de tasas alcanzables y no a un número concreto. En el modelo MAC de canal, cada antena transmisora se supone que envía un mensaje independiente el resto por lo que cada ráfaga de información es susceptible de tener una tasa diferente y única. En el caso del modelo BC, es la estación base la que envía informaciones independientes para a cada usuario, cada una con una tasa de transmisión diferente.

De esta forma, la capacidad se entenderá como aquel grupo de tasas de transmisión que se pueden conseguir simultáneamente con una probabilidad de error despreciable o lo suficientemente pequeña.

En contra de lo que se pueda pensar en primer término, los beneficios en capacidad que se pueden obtener en un canal MIMO multi-usuario pueden llegar a ser mayores que en los sistemas para un único usuario, lo que puede verse desarrollado en [3].

En los sistemas de un único usuario y con el fin de alcanzar la ganancia lineal en la capacidad ($\min(M,N)$) es necesario un número importante de antenas tanto en transmisión como en recepción mientras que en los canales MIMO multi-usuario sólo es necesario establecer ese número de antenas en los puntos de acceso para obtener una ganancia similar en la capacidad del sistema. De esta forma, en el punto de capacidad que maximiza la suma de las tasas de todos los usuarios involucrados, la capacidad crece linealmente con $\min(M,K*N)$, siendo K el número de usuarios y M y N las antenas del sistema en transmisión y el número de antenas utilizadas por usuario en recepción, por lo que en un sistema multi-usuario si aumentamos el número de usuarios presentes en el sistema, podríamos reducir el número de antenas por usuario simplificando así los móviles, lo que supone un factor clave en los sistemas móviles limitados por espacio.

Sin embargo, debido a la naturaleza de estos sistemas y la no colaboración entre los usuarios, la capacidad de procesamiento conjunto por parte de los usuarios está muy limitada mientras que en la estación base es mucho mayor.

Modelo BC

El modelo BC o Broadcast para el canal de los sistemas MIMO presenta un único punto de transmisión que envía una señal con información de distintos usuarios a través del canal de forma que al otro lado las antenas receptoras recogen dicha señal y extraen sus datos correspondientes.

Las señal transmitida asignará una potencia determinada P_k a los porcentajes τ_k del time slot o anchos de banda B_k de los distintos usuarios a los que se envía la señal, ya se esté trabajando con TD (*Time Duplex*) o FD (*Frequency Duplex*) respectivamente. Como efecto de su paso por el canal, las señales tendrán asociados una ganancia determinada, g_k , y un ruido blanco y gaussiano N_0 , ya que atraviesan distintos caminos hasta llegar a los distintos usuarios.

Así pues, la capacidad de este tipo de canal podría expresarse con las siguientes ecuaciones, para TD y FD respectivamente:

$$C_{TD} = \cup (R_1, \dots, R_K) \quad \text{para} \quad R_k = \tau_k B \log_2 \left(1 + \frac{g_k P_k}{N_0 B} \right) \quad (8)$$

$$C_{FD} = \cup (R_1, \dots, R_K) \quad \text{para} \quad R_k = B_k \log_2 \left(1 + \frac{g_k P_k}{N_0 B_k} \right) \quad (9)$$

Podemos decir que para el modelo BC, la capacidad máxima, definida como la unión de las regiones de capacidad, se consigue cuando se transmite la mayor potencia por un único canal, cuyas condiciones son las mejores.

A continuación presento el gráfico representativo de la región de capacidad del modelo BC para un sistema con dos usuarios:

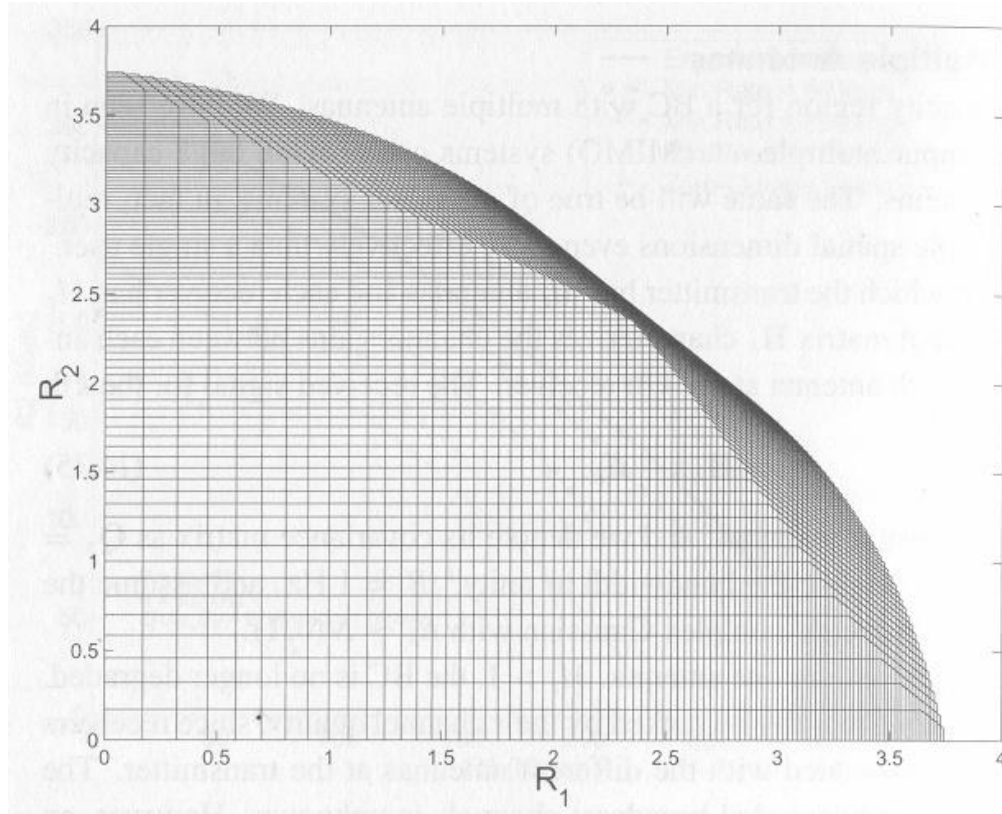


Ilustración 10 – Región de capacidad para sistema MIMO BC de dos usuarios [2]

Este modelo de canal representa el sentido descendente de una red móvil en el que una estación base envía las señales de información a través del canal. En el otro lado de la comunicación, los terminales de los usuarios reciben la señal de la estación base y extraen la información que atañe a su usuario.

Debido al hecho de que la señal es recibida por cada usuario por separado y que éstos en general no colaboran entre sí, la importancia de la decodificación en este tipo de canales es muy alta lo que hace que se exija una gran complejidad en los terminales de los usuarios. Con el fin de eliminar la complejidad de estos últimos y trasladarla a las estaciones base, y así reducir los costes de los terminales móviles, sus dimensiones y consumo energético, se empezaron a idear técnicas de precodificación a partir de las técnicas de codificación en recepción existentes y de las propiedades de dualidad de los modelos multiusuario de canal MIMO ([9],[10] y [11]).

De ahora en adelante, fijaremos una notación para las matrices y señales que toman parte en la comunicación que se desarrolla en este tipo de canales. A continuación, paso a detallar dicha notación y las dimensiones correspondientes (suponiendo que se asigna una única antena a cada usuario):

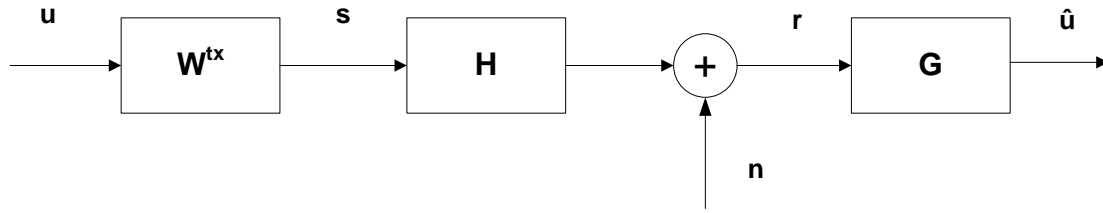


Ilustración 11 – Diagrama de bloques del modelo de canal de un sistema MIMO BC con precodificación lineal

Notación	Descripción	Dimensiones
K	Número de usuarios	N/A
M	Número de antenas transmisoras	N/A
u	Señal de información	$K \times 1$
W^{tx}	Matriz precodificación	$M \times K$
s	Señal transmitida	$M \times 1$
H	Matriz canal	$(K \times 1) \times M$
n	Ruido	$(K \times 1) \times 1$
r	Señal recibida	$K \times 1$
G	Matriz diagonal de decodificación	$K \times K$
û	Señal recibida tras procesado y decisión	$K \times 1$

Tabla 1 - Matrices y señales que forman parte del modelo de canal de los sistemas MIMO BC

Modelo MAC

Como ya hemos comentado antes, el modelo MAC de canal de los sistemas MIMO presenta distintos usuarios que envían sus informaciones de forma simultánea correspondientes hacia un mismo receptor con múltiples antenas.

Las señales recibidas tienen cada una su propia tasa R_k , su propia potencia P_k y se envían a través de un canal con ganancia de potencia g_k y ruido blanco y gaussiano N_0 . La región de capacidad para este tipo de canales es aquella región en la que las combinaciones de las tasas de las señales cumplen las siguientes condiciones, siendo B el ancho de banda del sistema y el resto de parámetros los explicados anteriormente:

$$R_k \leq B \log_2 \left(1 + \frac{g_k P_k}{N_0 B} \right) \quad (10)$$

$$R_k + R_{k+1} \leq B \log_2 \left(1 + \frac{g_k P_k + g_{k+1} P_{k+1}}{N_0 B} \right) \quad (11)$$

$$R_1 + \dots + R_k + \dots + R_K \leq B \log_2 \left(1 + \frac{g_1 P_1 + \dots + g_K P_K}{N_0 B} \right) \quad (12)$$

Podemos ver que cada usuario en este tipo de modelos tiene un límite de transmisión, no pudiendo transmitir a más de una tasa determinada (o equivalentemente transmitir con mayor potencia de un cierto límite) por lo que a diferencia de lo que ocurre en el modelo BC, si transmitimos sólo con un usuario se estará desperdiciando la capacidad del sistema. De este modo, el máximo de capacidad para los modelos MAC lo obtendremos al repartir la potencia de transmisión, con lo que conseguiremos no desperdiciar recursos.

Siguiendo con las conclusiones anteriores, tendremos las siguientes ecuaciones de capacidad máxima (13) y mínima (14) para cada usuario de un sistema con K usuarios:

$$C_k = B \log_2 \left(1 + \frac{g_k P_k}{N_0 B} \right) \quad (13)$$

$$C_k^* = B \log_2 \left(1 + \frac{g_k P_k}{N_0 B + g_1 P_1 + \dots + g_K P_K} \right) \quad (14)$$

Por tanto, la región de capacidad resultante para los canales MAC es la siguiente:

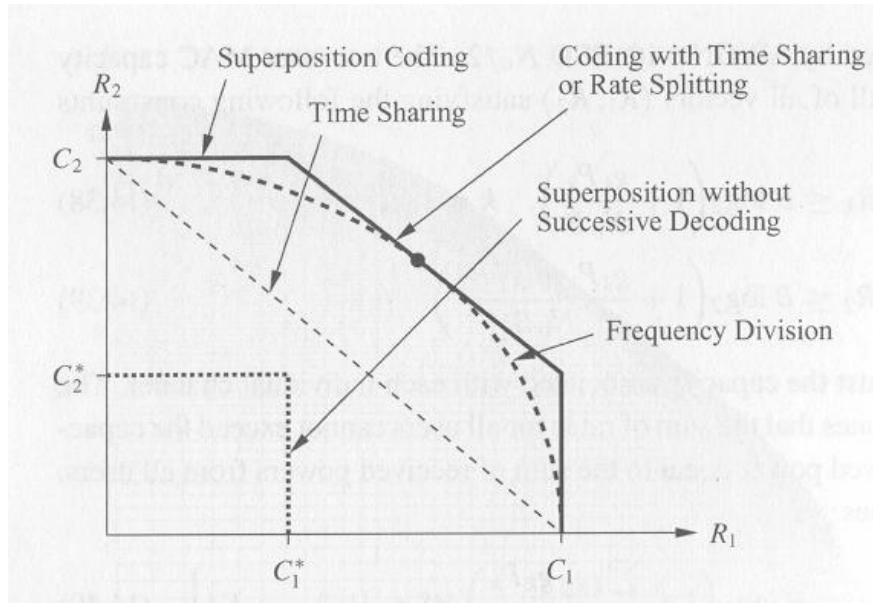


Ilustración 12 – Región de capacidad para sistema MIMO MAC de dos usuarios [2]

El ejemplo más claro de este tipo de canales es el sentido ascendente de los canales móviles, donde los terminales de los usuarios envían su información hacia la estación base y ésta las separa y procesa por separado.

A continuación paso a detallar la notación que de ahora en adelante utilizaremos para referirnos a las matrices que conforman el sistema, las señales correspondientes y sus dimensiones suponiendo que a cada usuario sólo se le asigna una antena:

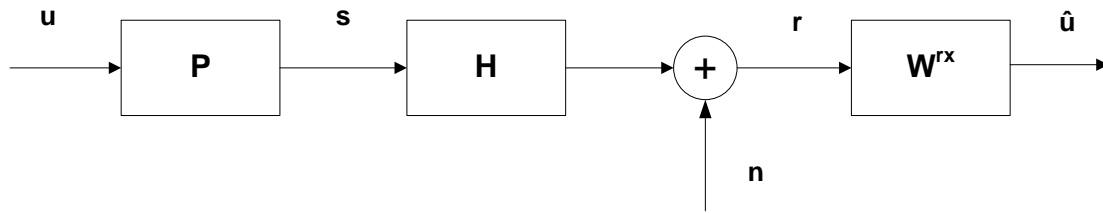


Ilustración 13 – Diagrama de bloques del modelo de canal de un sistema MIMO MAC

Notación	Descripción	Dimensiones
K	Número de usuarios	N/A
M	Número de antenas transmisoras	N/A
u	Señal de información	$K \times 1$
P	Matriz diagonal de precodificación	$K \times K$
s	Señal transmitida	$K \times 1$
H	Matriz canal	$(K \times 1) \times M$
n	Ruido	$M \times 1$
r	Señal recibida	$M \times 1$
W^{rx}	Matriz decodificación	$K \times M$
\hat{u}	Señal recibida tras procesado y decisión	$K \times 1$

Tabla 2 - Matrices y señales que forman parte del modelo de canal de los sistemas MIMO MAC

Dualidad BC – MAC

Los canales ascendente (MAC) y descendente (BC) parecen prácticamente iguales en algunos aspectos pero tienen importantes diferencias:

- El canal BC asocia una componente de ruido a cada una de las señales de información transmitidas mientras que el canal MAC sólo presenta una única componente de ruido dado el hecho de que sólo existe un único receptor (punto de acceso / estación base).
- La potencia asociada en el canal descendente es única mientras que en el canal ascendente, hay una potencia asociada a cada una de las señales que se envían y, por tanto, a cada uno de los usuarios del sistema.
- El efecto *cerca – lejos* se ve incrementado en el canal ascendente ya que las señales de este modelo se transmiten cada una por un canal distinto mientras que en el sentido descendente la señal es única y la interferencia que se asocia a las componentes de los distintos usuarios es la misma.

Para que los canales ascendente y descendente se puedan considerar duales deben cumplirse las siguientes condiciones:

- La ganancia de canal de cada uno de los usuarios es igual para ambos sentidos.

- Cada canal del modelo BC tiene los mismos estadísticos de ruido que el resto, y éstos estadísticos son iguales a sus correspondientes en el modelo MAC.
- La suma de las potencias individuales de las señales del sentido ascendente es equivalente a la potencia en el sentido descendente.

Sin embargo, las regiones de capacidad de estos canales no tienen ningún parecido, como podemos ver al comparar las ilustraciones *Ilustración 10* e *Ilustración 12*, aunque se den las condiciones necesarias para que se puedan considerar duales.

Según [5], la región de capacidad del modelo BC se consigue como unión de las regiones de capacidad del modelo MAC asociadas a las potencias individuales cuya suma da como resultado la potencia asociada al modelo BC y si procedemos del mismo modo podemos obtener el punto óptimo para el modelo BC a partir de la suma de la potencia de los puntos de las regiones de capacidad MAC que se encuentran a su altura.

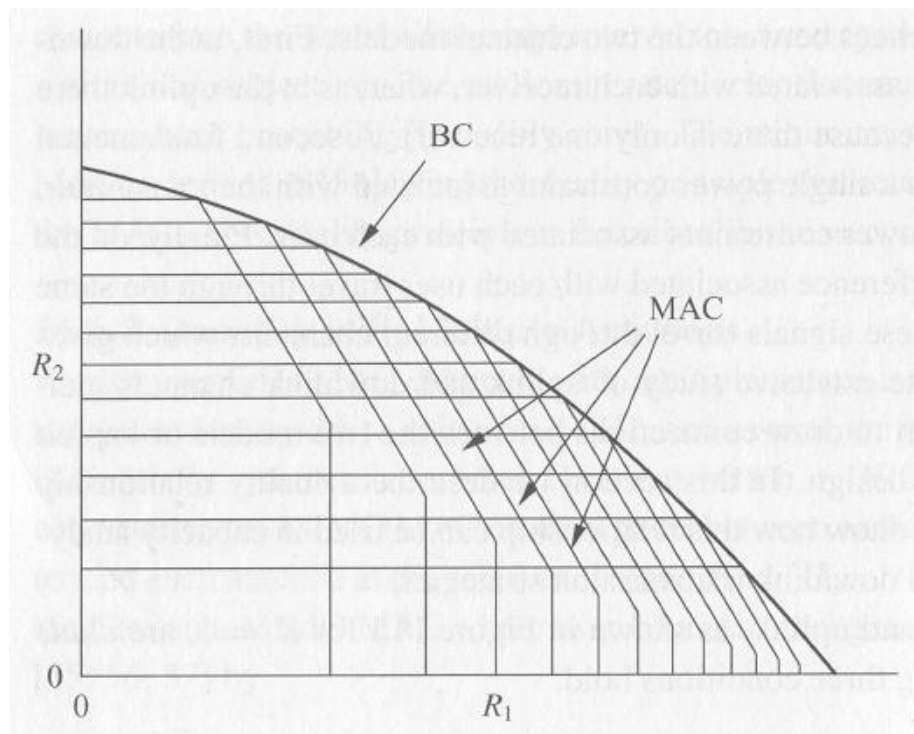


Ilustración 14 – Representación de la dualidad de las regiones de capacidad para sistemas MIMO [2]



Objetivos y Estructura del Proyecto

El objetivo de este proyecto es comprobar, mediante la simulación y análisis de los resultados obtenidos en ésta, la validez de las teorías existentes sobre la dualidad de los métodos de decodificación y precodificación lineales en los entornos MIMO multiusuario.

El proyecto se va a dividir en tres capítulos principales: el primero estará dedicado a desarrollar los conocimientos existentes sobre decodificadores y precodificadores para posteriormente desarrollar los estudios de dualidad entre éstos, focalizados en los métodos de decodificación *Zero-Forcing* (ZF), *MMSE* (Wiener) y de *Filtro Adaptado* (MF); una vez presentados los métodos de precodificación y decodificación, introduciremos en el segundo capítulo el entorno MIMO simulado y presentaremos los resultados de la simulación, fijándonos principalmente en la probabilidad de error (BER, *Bit Error Rate*), la información mutua y la SIR (*Signal to Interference Ratio*) para los distintos escenarios posibles para, por último extraer las conclusiones adecuadas y presentarlas en el tercer y último capítulo del proyecto.



Decodificadores y Precodificadores

Introducción a los esquemas de decodificación y precodificación

En un sistema de comunicaciones las señales que llegan al extremo receptor, tras pasar por el canal, se encuentran afectadas por los efectos que éste introduce como el ruido inherente a su respuesta o las interferencias inter-usuario e intersimbólica (*ISI*). Las interferencias se producen porque las señales atraviesan un mismo canal que comparten gran número de usuarios y que introduce modificaciones en los símbolos, de esta forma, las señales de los distintos usuarios repercutirán en las del resto y los símbolos, tras verse modificados, afectarán al resto de los símbolos transmitidos.

Estos efectos repercuten en todas las señales que atraviesan el canal del sistema y hacen así que se dificulte la detección correcta de los símbolos transmitidos.

Para paliar estas consecuencias del paso de las señales transmitidas por el canal se diseñan los bloques decodificadores que, a partir de información conocida del canal y las señales recibidas, llevan a cabo un procesamiento de los símbolos recibidos con el objetivo de eliminar las interferencias nocivas del canal.

La realización de este tipo de procesamiento no conlleva grandes problemas en el sentido ascendente ya que la estación base recibe todas las señales implicadas en el sistema y no existe dificultad en aumentar su complejidad con nuevos bloques de procesamiento, sin embargo, en el sentido descendente existen los problemas de la falta de cooperación entre los usuarios (que hace que no se pueda disponer de toda la información necesaria para el procesamiento) y de la falta de complejidad en las estaciones móviles (que hace que la capacidad de procesamiento en la decodificación del sentido descendente sea limitada).

Este tipo de limitaciones fueron las que promovieron la investigación de cómo diseñar bloques equivalentes a los decodificadores pero que pudieran llevar a cabo el procesamiento de la señal en el extremo transmisor para así conseguir evitarlas. De esta forma surgió la motivación de los precodificadores.

Tanto si estamos tratando con decodificadores como si lo estamos haciendo con precodificadores, siempre existe un esquema que se puede considerar óptimo, ML (*Maximum Likelihood*) para decodificadores y DPC (*Dirty Paper Coding*) en el caso de los precodificadores. Independientemente de si estamos trabajando con un esquema óptimo o subóptimo, los decodificadores y precodificadores se dividen entre soluciones lineales y no lineales. De esta forma, podríamos esbozar una clasificación como la siguiente:

- **Decodificadores**
 - *Óptimo*: ML
 - *Subóptimos*
 - Lineales: ZF, MMSE, filtro adaptado,...
 - No lineales: DFE (*Decision Feedback Equalizer*)



- **Precodificadores**

- *Óptimo*: DPC
- *Subóptimos*
 - Lineales: ZF, MMSE, filtro adaptado,...
 - No lineales: Tomlinson – Harashima

En este proyecto, para acercarnos a las hipótesis que plantean la equivalencia entre decodificación y precodificación y a su aplicación práctica en un sistema de comunicación móvil, nos centraremos en el análisis de la decodificación en el sentido ascendente y de la precodificación en el descendente.

Decodificadores

1. ML

El decodificador ML es el óptimo ya que está diseñado para minimizar la probabilidad de error del sistema, para ello se diseña el bloque decodificador de tal manera que la distancia entre los símbolos estimados y los recibidos sea la menor posible:

$$\hat{\mathbf{u}} = \underset{\mathbf{u}}{\operatorname{argmin}} (\|\mathbf{r} - \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{u}\|_2^2) \quad (15)$$

Sin embargo, este decodificador no es lineal ya que utiliza estructuras combinatorias con memoria para llevar a cabo la decodificación de las señales recibidas lo que hace que la complejidad de su implementación sea alta.

2. Filtro Adaptado (RxMF)

La estrategia de filtro adaptado está diseñada para maximizar la relación señal a ruido en el receptor y fue ideada por Tsoulos y Beach en [15]. Este diseño se puede considerar óptimo siempre que nos encontremos en sistemas limitados en ruido, sin embargo, no tiene en cuenta las interferencias que se puedan dar en el sistema.

El bloque decodificador va a intentar separar la señal deseada de la del ruido a través de la siguiente correlación:

$$\mathbf{W}^{\text{rx}} = \underset{\mathbf{W}^{\text{rx}}}{\operatorname{argmax}} \left(\frac{|E[\mathbf{u}\hat{\mathbf{u}}]|^2}{E[\|\mathbf{W}^{\text{rx}}\mathbf{n}\|_2^2]} \right) \quad (16)$$

Así, la forma final del bloque decodificador de filtro adaptado es la siguiente:

$$\mathbf{W}^{\text{rx}} = \mathbf{R}_{\mathbf{u}}\mathbf{P}^{\text{H}}\mathbf{H}^{\text{H}}\mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{-1} \quad (17)$$

Siendo $\mathbf{R}_{\mathbf{u}}$ la matriz de correlación de la señal a transmitir y $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}$ la matriz de correlación del ruido.

3. Filtro de forzado a cero (ZF) (RxZF)

Este decodificador busca eliminar la interferencia intersimbólica sin preocuparse de los efectos que su decodificación tenga sobre el ruido que el canal introduce en las secuencias de símbolos recibidos, generalmente, el ruido final ya no va a ser ruido blanco por lo que las prestaciones del sistema no van a ser tan óptimas como si el ruido del sistema no fuera procesado.

El filtro de forzado a cero, por tanto, va a estar diseñado para cumplir la siguiente ecuación:

$$\mathbf{W}^{\text{rx}} = \underset{\mathbf{W}^{\text{rx}}}{\operatorname{argmin}} (E[\|\mathbf{W}^{\text{rx}} \mathbf{n}\|_2^2]) \quad (18)$$

con la restricción $\mathbf{GHP} = \mathbf{I}$.

Con lo que la ecuación final del filtro RxZF es la siguiente:

$$\mathbf{W}^{\text{rx}} = (\mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{R}_n^{-1} \quad (19)$$

Comparando las ecuaciones de los filtros MF y ZF, podemos comprobar que sus expresiones sólo se diferencian en que el segundo decodificador añade el factor de cancelación de interferencia $(\mathbf{R}_u \mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P})^{-1}$.

4. Filtro de Wiener (MMSE) (RxWF)

Este filtro se diseña con el único objetivo de minimizar el error cuadrático medio (MSE) del sistema, es decir, que el filtro va a cumplir con la siguiente ecuación:

$$\mathbf{W}^{\text{rx}} = \underset{\mathbf{W}^{\text{rx}}}{\operatorname{argmin}} (E[\|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}\|_2^2]) \quad (20)$$

Tras minimizar el MSE en función del filtro decodificador, obtendremos la expresión de éste:

$$\mathbf{W}^{\text{rx}} = (\mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P} + \mathbf{R}_u^{-1})^{-1} \mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{R}_n^{-1} \quad (21)$$

A vista de la ecuación podemos establecer una relación entre el filtro de Wiener y el resto de decodificadores lineales en función de la relación señal a ruido. Podemos ver que cuanto mayor sea la SNR, menor será \mathbf{R}_u^{-1} con respecto a $\mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}$ por lo que nuestra expresión se acercará a la del filtro de forzado a cero mientras que para valores decrecientes de relación señal a ruido tendremos que el factor dominante será \mathbf{R}_u^{-1} y la expresión del RxWF será equivalente a la del filtro adaptado.

5. DFE

Este diseño fue presentado por Belfore y Park en [20] y está orientado a eliminar la ISI (*Inter-Symbol Interference*) sin incurrir en las desventajas de los filtros previos (amplificación y coloreado de ruido).

Para conseguirlo va a utilizar una estructura con realimentación, se va a tratar de una solución no lineal (por lo que no lo vamos a estudiar en detalle en el proyecto), que elimina parte de la interferencia sin amplificar el ruido. La estructura del filtro DFE puede usar un filtro lineal ZF o MMSE como filtro directo.

La estructura del decodificador DFE va a ser la siguiente:

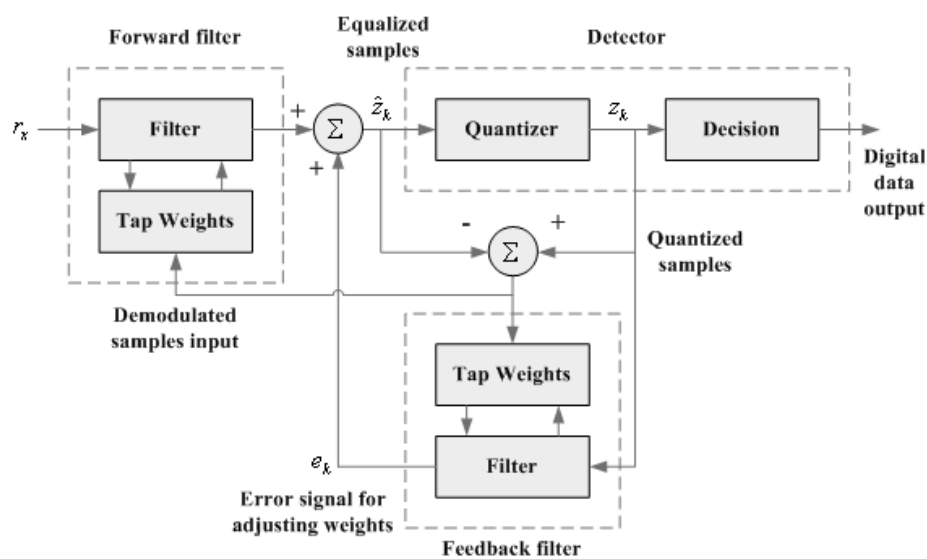


Ilustración 15 – Esquema de bloques del filtro decodificador DFE [20]

El filtro de realimentación utiliza generalmente un filtro ZF que eliminará la ISI, sin embargo, es muy sensible al ruido ya que va a necesitar una relación señal a ruido alta para tener buenas prestaciones.

Precodificadores

1. DPC

Este precodificador ideado por Costa y presentado en [21] compara la transmisión de información a través de un canal con escribir un mensaje en un papel lleno de otros escritos independientes y con algunos huecos en blanco.

Este diseño es óptimo ya que vamos a poder obtener el máximo de capacidad posible y va a utilizarse toda la potencia disponible.



Basándose en el símil del papel en sucio, Costa explica que con la parte de la potencia disponible del sistema (diferencia entre la potencia disponible de señal y la potencia de las interferencias, potencia destinada al resto de símbolos), que podríamos equiparar a los espacios en blanco del papel, va a transmitir la información y que con la potencia restante se podrá intentar eliminar la interferencia o, al menos, paliarla.

La complejidad de este diseño es que los códigos a utilizar deben ser escogidos para cumplir con el condicionamiento en potencia que he descrito anteriormente por lo que se debe conocer el estado del canal a la perfección para poder elegir adecuadamente los códigos adaptándose en todo momento al estado del canal.

El resultado de capacidad para cada usuario que se obtiene con este método es el siguiente:

$$C = \frac{1}{2} \log(1 + \rho) \quad (22)$$

Estudiando la ecuación anterior podemos explicar porqué el resultado de usar este precodificador se considera óptimo ya que la capacidad que obtenemos es la misma que obtendríamos en un sistema en el que no existieran interferencias.

2. Filtro adaptado (TxMF)

Este diseño es la versión análoga del decodificador RxMF pero en el lado de transmisión. En el siguiente apartado se comenta el proceso que llevó de la expresión del decodificador a la del precodificador y se presenta esta última.

3. Filtro de forzado a cero (TxZF)

Este diseño es la versión análoga del decodificador RxZF pero en el lado de transmisión. En el siguiente apartado se comenta el proceso que llevó de la expresión del decodificador a la del precodificador y se presenta esta última.

4. Filtro de Wiener (TxWF)

Este diseño es la versión análoga del decodificador RxWF pero en el lado de transmisión. En el siguiente apartado se comenta el proceso que llevó de la expresión del decodificador a la del precodificador y se presenta esta última.

5. Tomlinson – Harashima

Este diseño busca minimizar el MSE. Surgió como resultado de los trabajos de los autores que le dan nombre, [23] y [24] respectivamente.

El algoritmo de este precodificador intenta extraer los símbolos que pueden interferir en la transmisión del símbolo actual antes de enviarlo por el canal. Para ello utiliza una rama de realimentación, por lo que estamos hablando de un precodificador no lineal.

La dificultad de este diseño reside en que para el diseño correcto de la rama de realimentación es imprescindible un conocimiento perfecto del estado del mismo, lo que no suele ser posible.

La estructura del sistema es la siguiente:

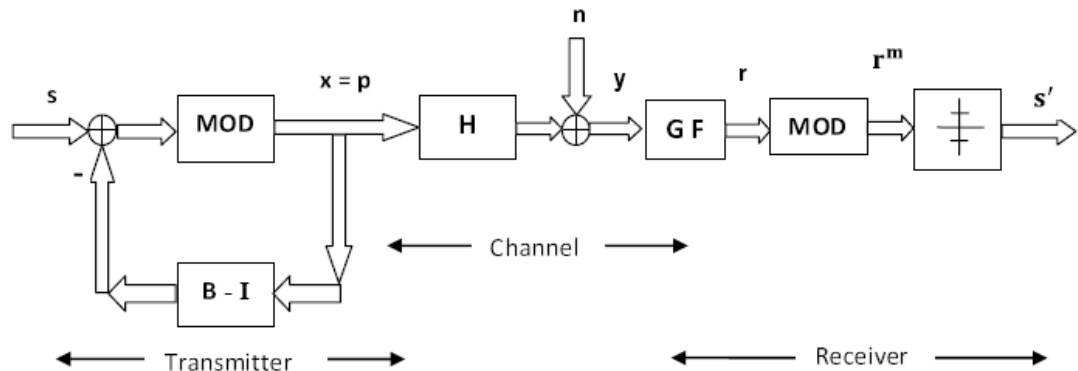


Ilustración 16 – Esquema de bloques del filtro precodificador Tomlinson - Harashima [25]

A la vista de la estructura podemos decir que el Tomlinson – Harashima es una adaptación del filtro decodificador DFE para adaptarlo al extremo transmisor. Al igual que en el caso del DFE, se pueden utilizar múltiples filtros lineales en la rama de realimentación y el ZF es el precodificador más empleado.

Decodificadores → Precodificadores

Introducción al problema del procesamiento en transmisión

El mayor problema que se nos presenta a la hora de utilizar procesamiento de señal en transmisión es que no siempre es posible realizar dicho procesamiento o derivar la precodificación correspondiente al sistema decodificador que estamos usando en recepción.

Vamos a establecer las condiciones necesarias para que el preprocesado de la señal sea posible suponiendo que estamos trabajando en el sentido descendente del canal, es decir que la transmisión la lleva a cabo la estación base (BS).

Siempre que la respuesta al impulso del canal descendente esté disponible en la estación base, el procesamiento de la señal en el extremo transmisor va a ser posible. Como ya hemos comentado, la principal ventaja de la precodificación frente a la decodificación que se realiza en recepción se da al utilizarla en el enlace descendente, ya que así toda la



complejidad de procesamiento recae en las estaciones base, pudiendo, de esta forma, simplificar al máximo las estaciones móviles (*MS*) en ese aspecto.

Sin embargo, sólo podemos asumir válidamente el conocimiento de la respuesta impulsiva del canal descendente en la estación base si nos encontramos en un sistema TDD (*Time Division Duplex*), ya que en este caso, tanto el canal descendente como el ascendente comparten la misma banda de frecuencia por lo que podremos estimar la respuesta impulsiva del canal descendente a partir de las señales recibidas a través del sentido ascendente. Aún en este supuesto, el tiempo de coherencia del canal debe ser lo suficientemente grande para que no se produzcan cambios en su respuesta durante el tiempo que pasa entre las transmisiones en sentido ascendente y descendente puesto que si la respuesta del canal cambia en ese lapso de tiempo nuestra estimación no será correcta.

En caso de estar en un sistema FDD (*Frequency Division Duplex*), los dos enlaces no se encuentran en la misma banda de frecuencia por lo que no comparten los mismos parámetros. Aún así podemos sobrellevar la falta de conocimiento de la respuesta impulsiva del canal explotando las propiedades de éste que son independientes de la frecuencia y que cambian lentamente. Si suponemos que los parámetros del canal que cambian rápidamente son conocidos en la estación base podremos llevar a cabo el procesamiento de la señal en transmisión. De esta forma, podemos concluir que sólo si existe realimentación de información entre las estaciones móviles y la estación base va a ser posible realizar el preprocesado de señal con prestaciones equivalentes a las que se obtendrían decodificando en el extremo receptor.

La primera aproximación a la idea de utilizar la reciprocidad entre los canales ascendente y descendente de un sistema fue introducida por Henry y Glance para sistemas con canales de desvanecimiento plano y múltiples antenas en el extremo transmisor en [13], que se puede entender como un caso especial de la solución propuesta por Esmailzadeh y Nakagawa en [14] que surgió como resultado de querer traspasar del receptor al transmisor la parte del filtro adaptado asociada al canal.

A continuación paso a presentar los precodificadores que vamos a utilizar durante el proyecto y el proceso que llevó a su formulación partiendo del conocimiento de sus respectivos decodificadores.

Filtro Adaptado

Este filtro es aquel que va a conseguir maximizar la relación señal a ruido en el receptor correspondiente y que fue desarrollado por Tsoulos y Beach en [15].

El método para derivar el filtro precodificador adaptado ($TxMF$) a partir del filtro adaptado en recepción ($RxMF$) fue introducida por Esmailzadeh y Nakagawa en [14]. En este documento, y basándose en la reciprocidad de los canales de subida y bajada del sistema, se presenta que si se puede medir la potencia y el desfase relativo de las señales presentes y si se pueden llegar a estimar para instantes futuros, se podrán codificar las futuras señales transmitidas de forma que las señales recibidas tengan las características de diversidad de una señal Rake, es decir, una combinación de los multirayectos

escalados por un factor directamente relacionado con la potencia de la señal de dicho camino.

De esta forma podemos decir que la expresión del precodificador \mathbf{T}_{xMF} es la expuesta a continuación, donde, como se indicó en la ilustración *Ilustración 11*, \mathbf{H} es la matriz de canal, \mathbf{G} es la matriz de decodificación en recepción (en caso de que no exista decodificación será la matriz identidad), \mathbf{R}_u es la matriz de correlación de la señal a transmitir, E_{tr} es la potencia de transmisión disponible y β_{TxMF} es un factor de escalado para limitar la potencia transmitida a E_{tr} :

$$\mathbf{W}^{tx} = \beta_{TxMF} \mathbf{H}^H \mathbf{G}^H \quad (23)$$

donde β_{TxMF} es:

$$\beta_{TxMF} = \sqrt{\frac{E_{tr}}{tr(\mathbf{H}^H \mathbf{G}^H \mathbf{R}_u \mathbf{G} \mathbf{H})}} \quad (24)$$

A la vista de las ecuaciones podemos comprobar que el filtro adaptado en el transmisor es el transpuesto conjugado del filtro correspondiente en recepción (17) eliminando el factor de escalado. Podemos ver a su vez que el \mathbf{T}_{xMF} no tiene en cuenta las propiedades del ruido del canal. Aunque este resultado sea de esperar, ya que el transmisor no tiene influencia en el ruido en recepción, si queremos adaptarnos a las condiciones del ruido del sistema deberíamos incorporar un filtro blanqueador de ruido en recepción.

Filtro de forzado a cero

Este filtro es el más intuitivo para la aproximación al procesado en transmisión porque elimina las interferencias introducidas en las estaciones móviles. Esto se debe a que el transmisor no tiene influencia en las componentes de ruido en el receptor por lo que no nos veremos afectados por los mismos efectos que se producían en el caso del decodificador ZF.

El filtro de forzado a cero en transmisión (\mathbf{T}_{xZF}) es introducido como una solución de predecorrelación para canales con desvanecimiento plano por Tang en [16] y es formulado como filtro pre-ecualizador en un sistema TDD por Liu en [17], Vojcic demostró que este filtro precodificador proviene del criterio MMSE para el detector en recepción en [18] y la solución para los sistemas FDD es presentada por Foster en [19].

Esta técnica fuerza que la cadena que forman los filtros y el canal sea igual a la identidad, es decir:

$$\mathbf{G} \mathbf{H} \mathbf{W}^{tx} = \mathbf{I} \quad (25)$$

De esta forma llegamos a la siguiente expresión para la matriz de precodificación \mathbf{T}_{xZF} :

$$\mathbf{W}^{tx} = \beta_{TxZF} \mathbf{H}^H \mathbf{G}^H (\mathbf{G} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \mathbf{G}^H)^{-1} \quad (26)$$

donde β_{TxZF} es:

$$\beta_{TxZF} = \sqrt{\frac{E_{tr}}{tr((\mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{H}^H\mathbf{G}^H)^{-1}\mathbf{R}_u)}} \quad (27)$$

Filtro de Wiener

Este filtro decodificador se obtuvo al buscar minimizar el error cuadrático medio en recepción tras la decodificación de las señales recibidas.

Para calcular la expresión del filtro precodificador de Wiener ($TxWF$) hay que derivar la expresión del error cuadrático medio en función de dicho filtro por lo que el filtro objetivo deberá cumplir la siguiente ecuación:

$$\mathbf{H}^H\mathbf{G}^H\mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{W}^{tx} = \mathbf{H}^H\mathbf{G}^H \quad (28)$$

Debido a que de forma general la matriz $\mathbf{H}^H\mathbf{G}^H\mathbf{G}\mathbf{H}$ no es invertible, se han buscado posibles soluciones sin usar escalado como la obtenida por Vojcic en [18]:

$$\mathbf{W}^{tx} = \mathbf{H}^H\mathbf{G}^H(\mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{H}^H\mathbf{G}^H)^{-1} \quad (29)$$

Sin embargo, esta solución no es la óptima ya que no usa la totalidad de la potencia disponible en transmisión. Para obtener la ecuación que optimiza el rendimiento del sistema y cumple que el error cuadrático medio es el mínimo posible debemos escalar la señal transmitida de forma óptima (β_{TxWF}).

De esta forma obtenemos la siguiente expresión para la matriz de precodificación $TxWF$:

$$\mathbf{W}^{tx} = \beta_{TxWF} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{G}^H \quad (30)$$

donde β_{TxWF} y \mathbf{F} son:

$$\beta_{TxWF} = \sqrt{\frac{E_{tr}}{tr(\mathbf{F}^{-2}\mathbf{H}^H\mathbf{G}^H\mathbf{R}_u\mathbf{G}\mathbf{H})}} \quad (31)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}^H\mathbf{G}^H\mathbf{G}\mathbf{H} + \frac{tr(\mathbf{G}\mathbf{R}_n\mathbf{G}^H)}{E_{tr}} \mathbf{I} \quad (32)$$



A la vista de su ecuación podemos establecer la siguiente relación entre TxWF y los otros dos filtros precodificadores que vamos a utilizar:

$$\frac{E_{tr}}{tr(\mathbf{G}\mathbf{R}_n\mathbf{G}^H)} \rightarrow 0; \quad \mathbf{W}^{\text{tx}}_{\text{TxWF}} \rightarrow \mathbf{W}^{\text{tx}}_{\text{TxMF}} \quad (33)$$

$$\frac{E_{tr}}{tr(\mathbf{G}\mathbf{R}_n\mathbf{G}^H)} \rightarrow \infty; \quad \mathbf{W}^{\text{tx}}_{\text{TxWF}} \rightarrow \mathbf{W}^{\text{tx}}_{\text{TxZF}} \quad (34)$$

Si establecemos relación directa entre la relación señal a ruido y el factor $\frac{E_{tr}}{tr(\mathbf{G}\mathbf{R}_n\mathbf{G}^H)}$, podemos comprobar que la relación entre los precodificadores TxWF, TxZF y TxMF son equivalentes a las que existen para los decodificadores $\left(E_{tr} \cong S; tr(\mathbf{G}\mathbf{R}_n\mathbf{G}^H) \cong N \Leftrightarrow SNR \cong \frac{E_{tr}}{tr(\mathbf{G}\mathbf{R}_n\mathbf{G}^H)}\right)$.

Como ya hemos comentado, esta solución utiliza toda la potencia disponible en transmisión y minimiza el error cuadrático medio del sistema en recepción. Además dependerá de las propiedades del ruido a pesar de que la matriz de covarianza de éste no aparezca en la ecuación de la matriz de precodificación directamente. Al igual que en el caso del filtro adaptado, podemos incluir en recepción un filtro blanqueador de ruido para así adecuarnos a todas las propiedades del ruido.

Resultados del proyecto

Escenario

Para desarrollar el estudio práctico sobre la dualidad transmisión-receptor en los sistemas MIMO vamos a simular con MATLAB® un entorno multiusuario que sigue los esquemas de los modelos de enlace ascendente y descendente que hemos presentado anteriormente (*Ilustración 13* y *Ilustración 11* respectivamente) haciendo que las matrices **P**, en el caso del sentido ascendente, y **G**, para el sentido descendente, sean iguales a la matriz identidad y que cada uno de los usuarios esté asociado a una antena ya sea en transmisión o en recepción respectivamente.

Las medidas que vamos a utilizar para el análisis y comparación de prestaciones en este estudio van a ser la probabilidad de error, la información mutua y la relación señal a interferencia.

Con el objeto de obtener un resultado lo más general posible, vamos a promediar los resultados de la simulación sobre 1000 canales distintos sobre los que transmitiremos 2000 señales multiusuario, BPSK y QPSK, y analizaremos las prestaciones del sistema para cada una de las posibles situaciones que se pueden dar en el mismo (mayor número de antenas transmisoras/receptoras que de usuarios, mayor número de usuarios que de antenas o mismo número de antenas que de usuarios en el sistema) con las configuraciones 8x5, 5x8 y 8x8 respectivamente.

La probabilidad de error va a ser la principal medida que utilizaremos para la comparación de las prestaciones de las configuraciones del sistema ya que es el indicador que se utiliza generalmente para dicho fin ([12], [26]). La calcularemos como la probabilidad de error de bit para cada una de las señales y de los canales que simularemos.

La información mutua nos servirá como indicador adicional a la probabilidad de error y la calcularemos según la siguiente ecuación, donde **R_r** representa la matriz de correlación de la señal recibida en el receptor y **R_n** la del ruido:

$$I = \log_2 \left(\det \left| \frac{\mathbf{R}_r}{\mathbf{R}_n} \right| \right) \quad (35)$$

La relación señal a interferencia (*SIR*, *Signal-to-Interference Ratio*) representa la relación entre la potencia transmitida por el sistema para un usuario en concreto y la parte de la potencia transmitida que recibe el mismo usuario pero que se debe a la interferencia del resto.

La SIR está íntimamente relacionada con el tema de nuestro estudio ya que Viswanath sostiene en [11] que la dualidad entre transmisión y recepción existe puesto que este indicador es igual en el sistema ya decodifiquemos o precodifiquemos usando la matriz hermítica de la correspondiente en decodificación.

Para el cálculo de la SIR vamos a promediar para los usuarios del sistema la siguiente ecuación de la relación señal a interferencia individual:

$$SIR_k = \frac{|v_k^T H u_k|^2}{\sigma^2 + \sum_{j \neq k} |v_k^T H u_j|^2} \quad (36)$$

Donde σ es la potencia del ruido del sistema en relación con la potencia de la señal transmitida, v_k^T es la componente de la matriz de decodificación que afecta al usuario k (en el sentido ascendente será el k -ésimo vector fila de la matriz de decodificación \mathbf{W}^{rx} mientras que en el sentido descendente será el k -ésimo vector fila de la matriz identidad) y u_k la componente de la matriz de precodificación que afecta al usuario k (en el sentido ascendente será la k -ésima columna de la matriz identidad mientras que en el sentido descendente será el k -ésimo vector columna de la matriz de precodificación \mathbf{W}^{tx}).

Resultados

Probabilidad de error

1. BPSK

1.1. Mayor número de antenas que de usuarios (M=8, K=5)

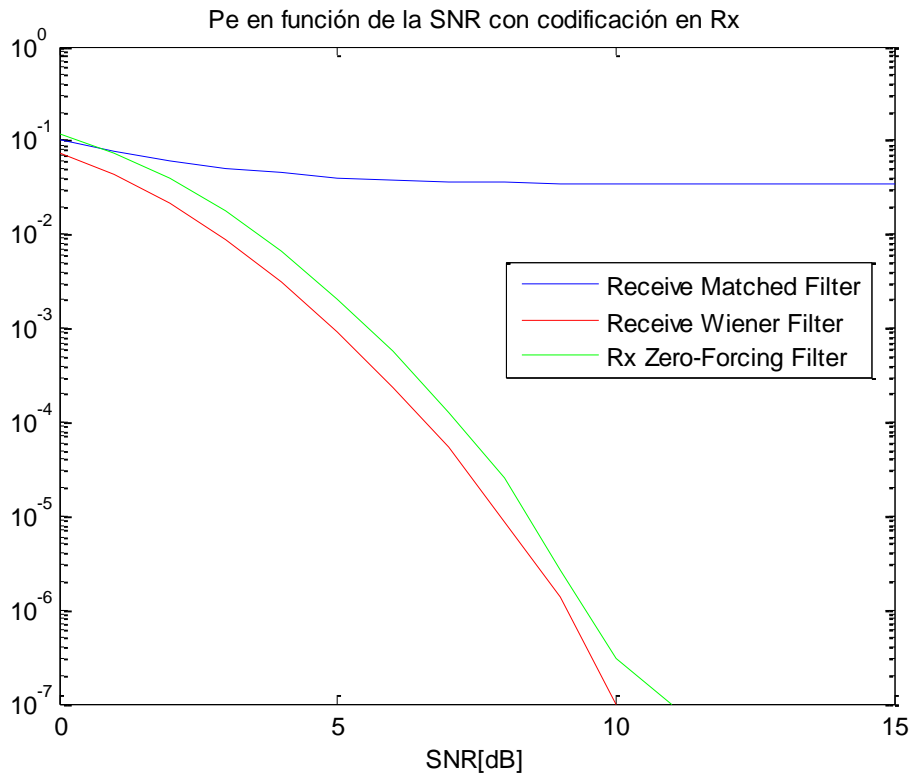


Ilustración 17 – BER en función de la SNR en caso de usar decodificación (BPSK, M>K)

Podemos comprobar por la figura que el método de Wiener es el que mejor prestación proporciona, en lo que a BER se refiere, independientemente de que nos encontremos en situaciones de baja o alta SNR. A su vez, vemos que la relación entre los tres métodos de decodificación queda demostrada, para situaciones en las que la relación señal a ruido es baja las prestaciones del método de Wiener se asemejan a las que aporta el método de filtro adaptado (33) mientras que según va creciendo la SNR, el método de Wiener ofrece unas prestaciones mucho mejores que se van asemejando a las del método de forzado a cero (34).

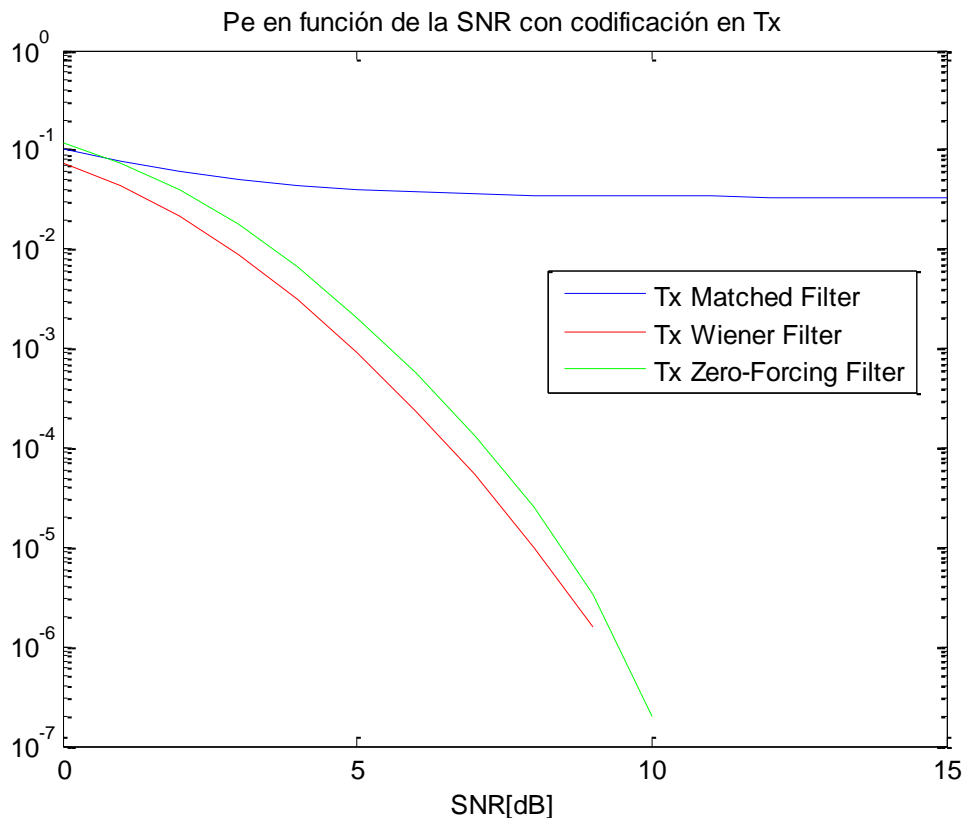


Ilustración 18 – BER en función de la SNR en caso de usar precodificación (BPSK, $M > K$)

A la vista de la figura podemos decir que las prestaciones, en el caso de que utilizemos los esquemas de precodificación equivalentes a los que hemos analizado en la anterior gráfica, tienen el mismo comportamiento que los primeros. De hecho podemos ver en la siguiente ilustración que en realidad las prestaciones resultado de usar decodificación y precodificación son equivalentes en el caso de tener mayor número de antenas que usuarios en el sistema:

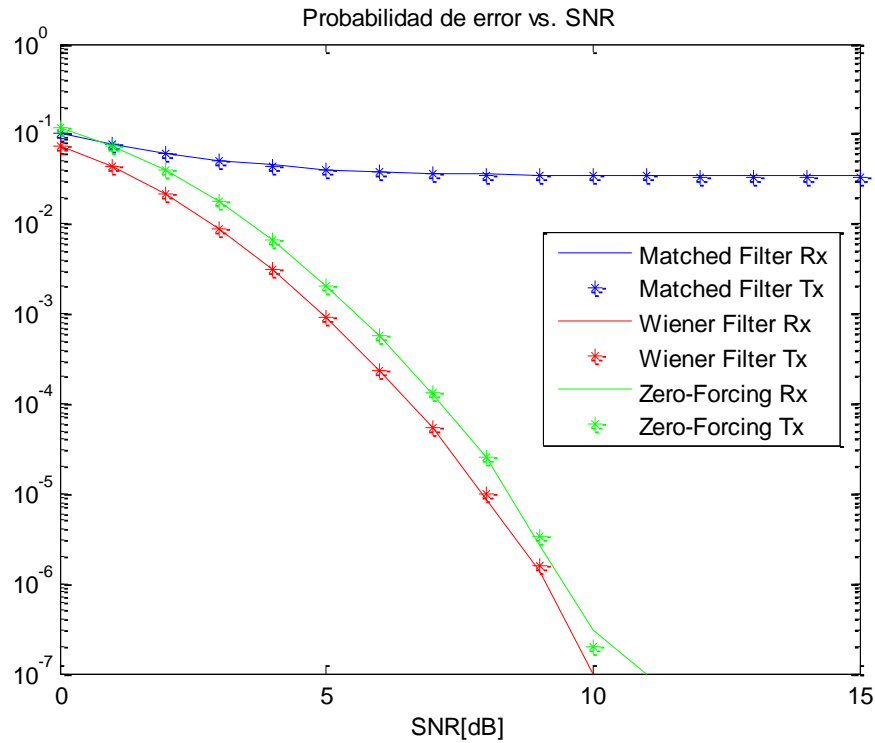


Ilustración 19 – BER en función de la SNR para ambos casos (BPSK, $M > K$)

1.2. Mayor número de usuarios que de antenas ($M=5$, $K=8$)

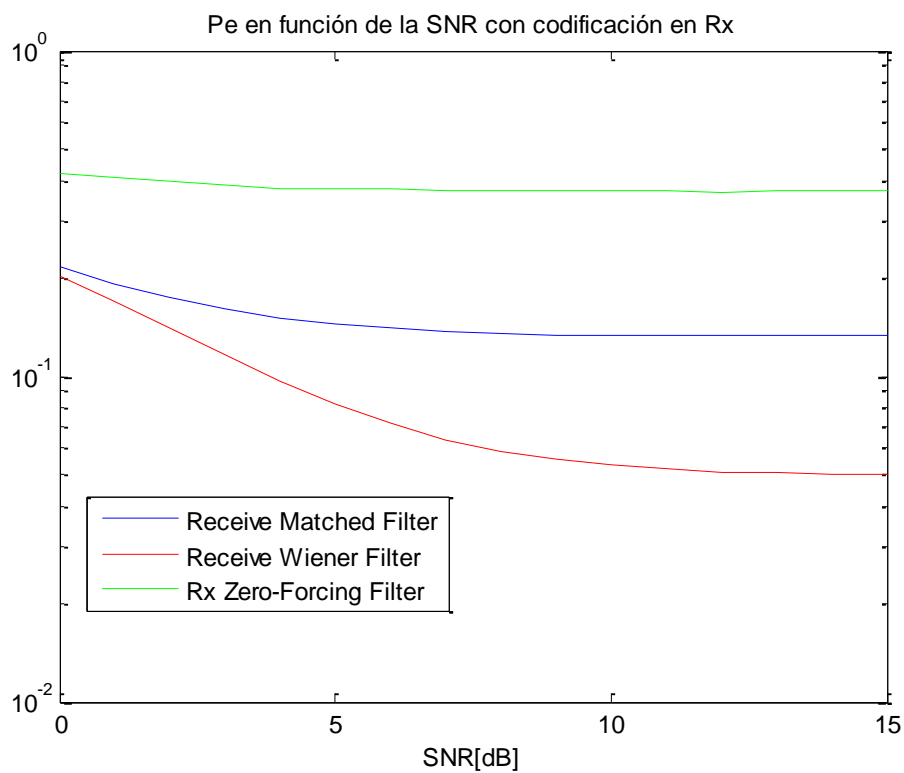


Ilustración 20 – BER en función de la SNR en caso de usar decodificación (BPSK, $M < K$)

En el caso de tener menos antenas en el sistema que usuarios del mismo, el enlace no va a estar bien condicionado y las prestaciones van a estar limitadas por la interferencia de los distintos usuarios. Además podemos ver que en esta situación las prestaciones que ofrece el filtro de forzado a cero son las peores, ya que necesita un buen condicionamiento para su correcto funcionamiento.

Aunque en este caso se pueda apreciar peor, debido a las limitaciones por interferencia que presenta el sistema, también vemos que para valores bajos de SNR las prestaciones del método de Wiener y las del método de filtro adaptado son equivalentes y que se van distanciando según crece la relación señal a ruido.

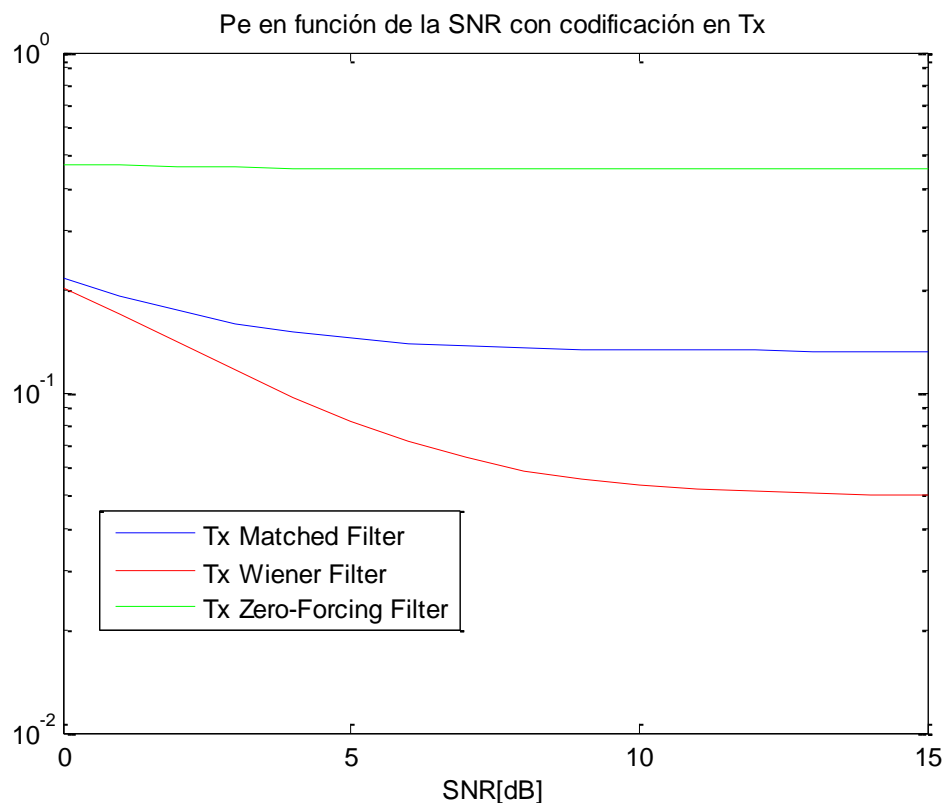


Ilustración 21 – BER en función de la SNR en caso de usar precodificación (BPSK, $M < K$)

Al igual que en el caso en que el sistema presentaba mayor número de antenas, el hecho de usar los esquemas de precodificación equivalentes a los decodificación usados no supone ninguna variación en la BER del sistema ni en el comportamiento de los métodos utilizados y así lo podemos comprobar en la gráfica que presenta los dos esquemas simultáneamente:

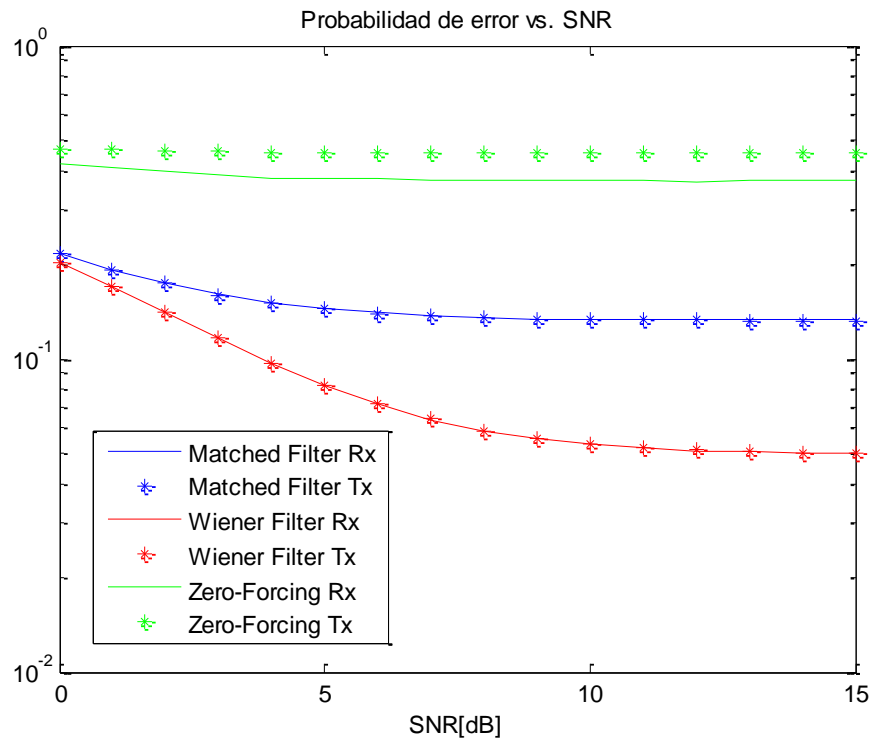


Ilustración 22 – BER en función de la SNR en ambos casos (BPSK, $M < K$)

1.3. Mismo número de antenas que de usuarios ($M=5$ y 8 , $K=5$ y 8)

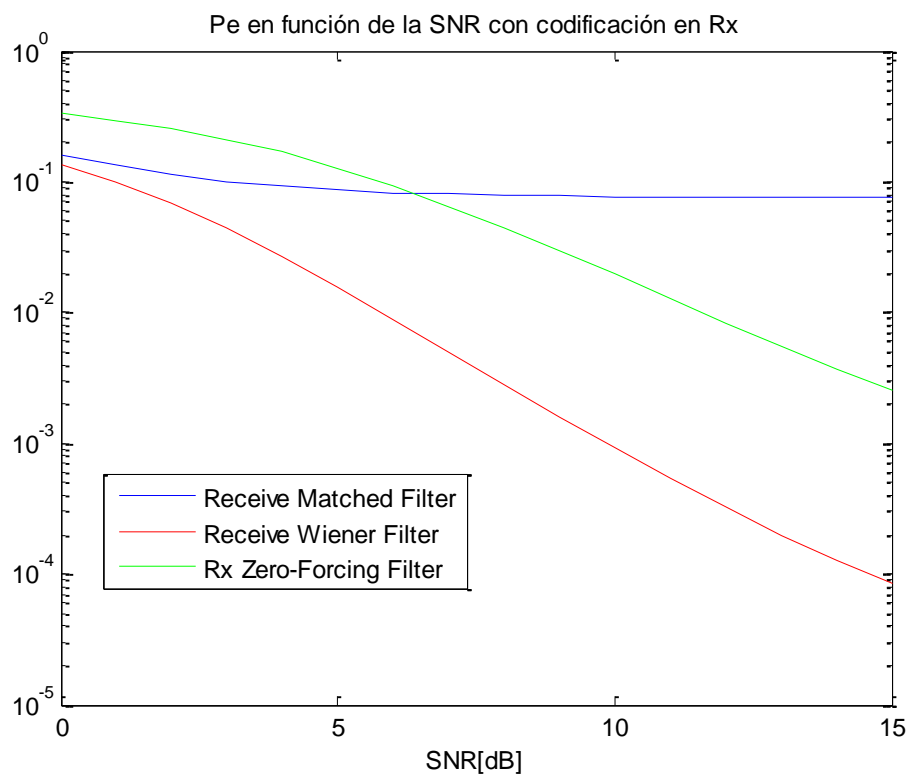


Ilustración 23 – BER en función de la SNR en caso de usar decodificación (BPSK, $M=K=8$)

Los resultados presentados son los correspondientes a la configuración 8x8 ($M=8$ y $K=8$), los resultados para el sistema con cinco antenas y cinco usuarios no ha sido representado porque presenta los mismos valores y comportamientos para los tres métodos.

Al analizar la gráfica vemos que sí se puede decir que en este caso el sistema está mejor condicionado que el anterior, pues las probabilidades de error son menores y los comportamientos de los métodos se ajustan a lo esperado, aunque todavía se encuentra algo limitado por las interferencias (algo que se puede comprobar para valores altos de relación señal a ruido donde las prestaciones de los métodos de Wiener y forzado a cero no confluyen, presentando sus curvas un punto de inflexión para dichos valores a partir del cual su curvatura disminuye e indica que el sistema empieza a verse limitado por las interferencias del resto de usuarios).

Como en el resto de casos y como es de esperar, el método de Wiener es el que presenta mejores prestaciones para todos los valores de relación señal a ruido y ofrece resultados parecidos a los del filtro adaptado para valores bajos de SNR.

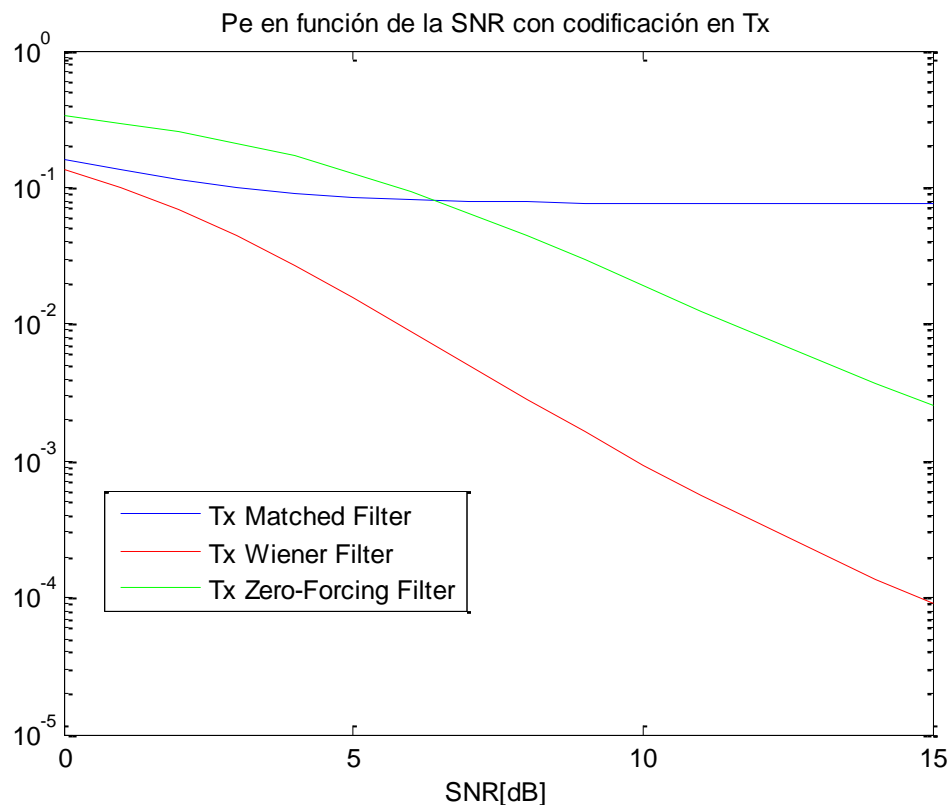


Ilustración 24 – BER en función de la SNR en caso de usar precodificación (BPSK, $M=K=8$)

Con los esquemas precodificadores obtenemos resultados equivalentes, tanto en valores como en comportamiento de los métodos, a los obtenidos con la decodificación. Para confirmar que los resultados realmente son los mismos que obtendríamos usando decodificación representamos conjuntamente todos los resultados:

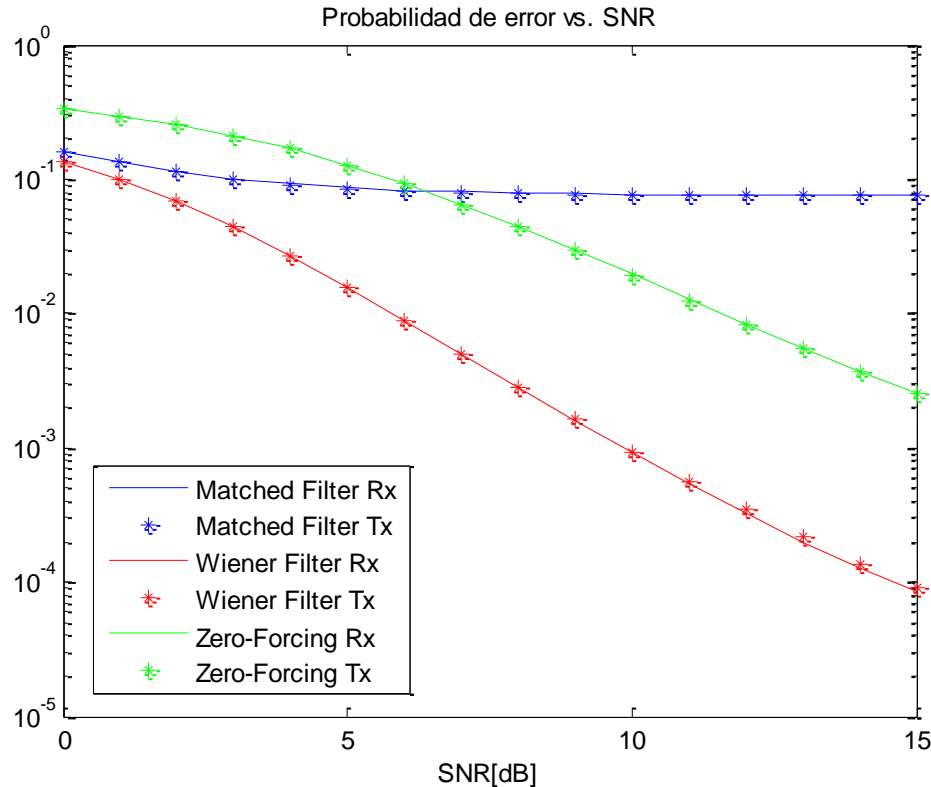


Ilustración 25 – BER en función de la SNR para ambos casos (BPSK, $M=K=8$)

A la vista de los tres casos podemos corroborar que, como exponen Vu y Paulraj en [26], la relación entre el número de antenas del sistema y los usuarios del mismo es crítica en lo que al rendimiento del sistema se refiere ya que cuanto mayor es el número de antenas con respecto a los usuarios, mejores serán las prestaciones en el sistema y menos limitado estará el mismo por las interferencias interusuario. Este hecho supone otra medida de compromiso a tomar entre la mejora de las prestaciones de un sistema y el número de antenas que presenta el mismo (con el aumento de complejidad y costes que implican).

Para terminar de confirmar esta hipótesis y estudiar más en profundidad el incremento que sufren las prestaciones de un sistema vamos a comparar dichas prestaciones para distintas configuraciones de sistema (tomando como valor fijo el número de usuarios, que será igual a 5, variaremos el número de antenas del sistema entre 2 y 8).

1.4. Estudio de la influencia del número de antenas en las prestaciones

Para analizar la influencia de la relación entre el número de antenas y el de usuarios del sistema en la probabilidad de error que se obtiene en la recepción del mismo vamos a representar, debido a la densidad de gráficas, las prestaciones para cada una de las configuraciones por separado para los distintos métodos que estamos estudiando:

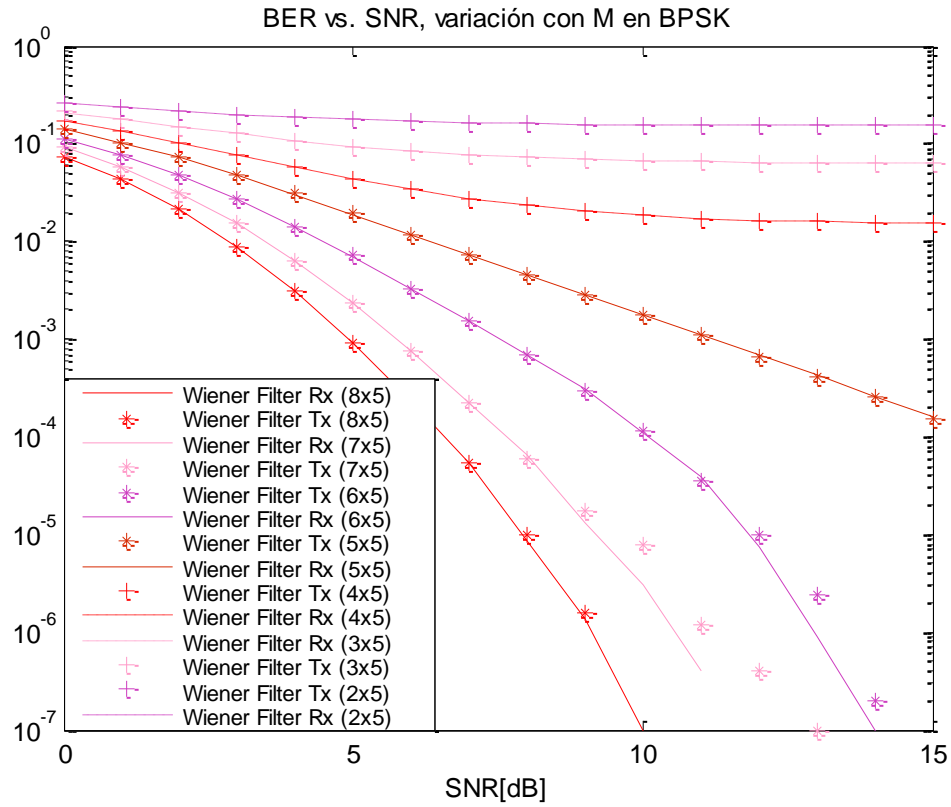


Ilustración 26 - Evolución de la BER con el número de antenas (Wiener, BPSK)

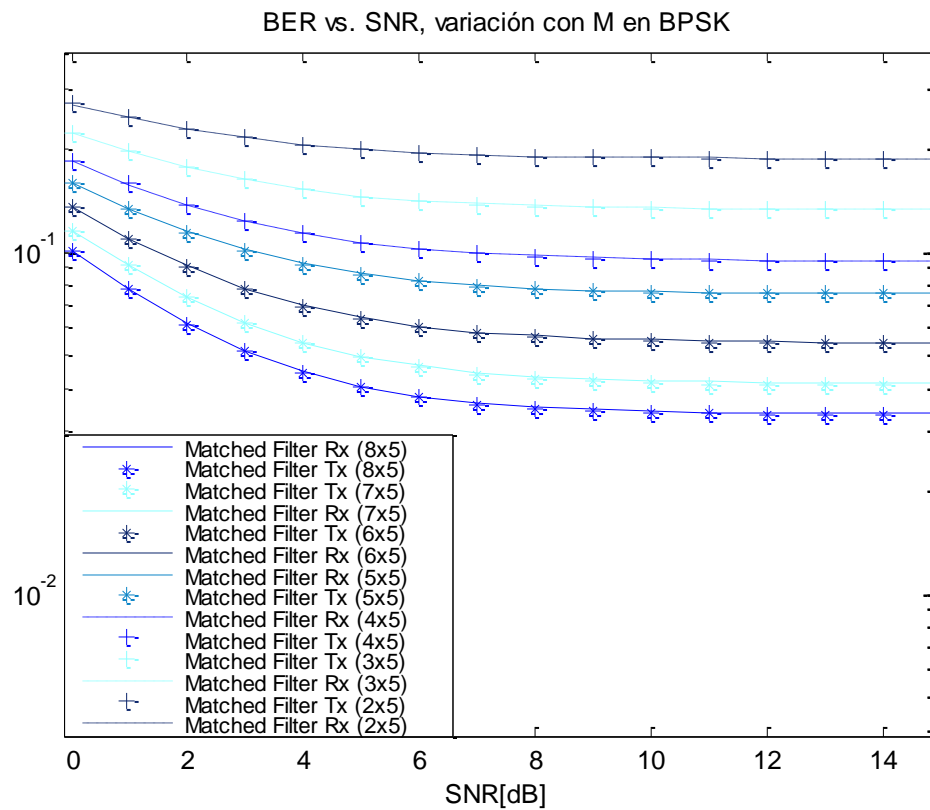


Ilustración 27 - Evolución de la BER con el número de antenas (Matched Filter, BPSK)

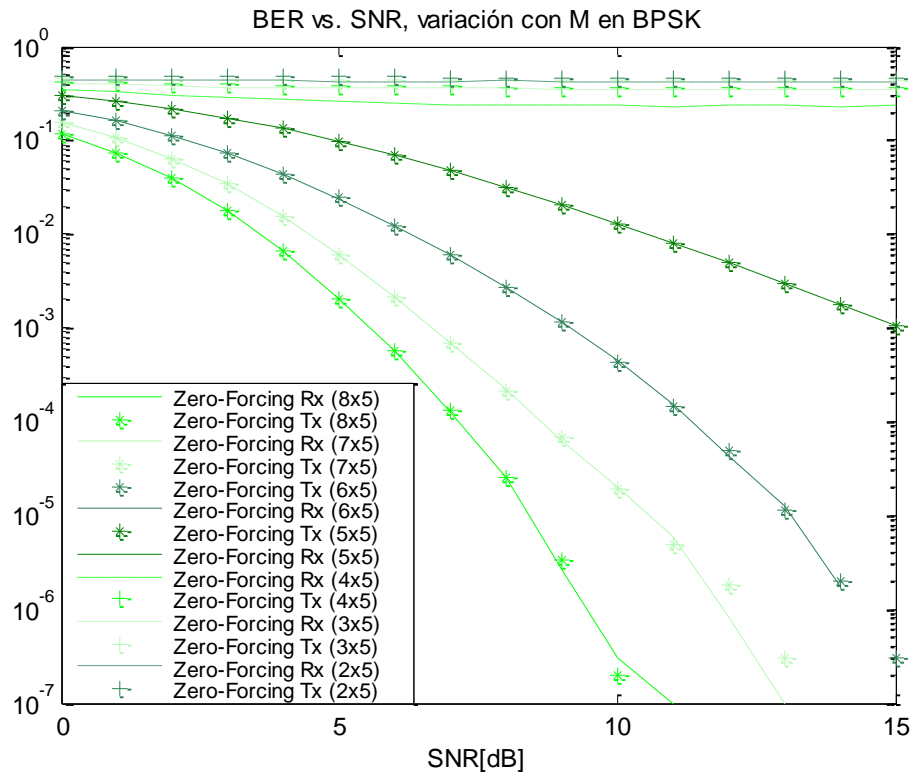


Ilustración 28 - Evolución de la BER con el número de antenas (ZF, BPSK)

Al igual que en las anteriores gráficas, podemos ver que el método de Wiener presenta las mejores prestaciones en lo que a probabilidad de error se refiere para cualquiera de las configuraciones. También podemos concluir como parte del análisis que, como esperábamos demostrar en el estudio, las prestaciones de un mismo método, ya sea utilizando precodificación o decodificación, son equivalentes.

En lo que a la evolución con el número de antenas se refiere podemos ver que los métodos de Wiener y filtro adaptado siguen un patrón de crecimiento constante de las prestaciones con el aumento del número de antenas respecto al de usuarios, ya que según aumenta el número de antenas, mayor diversidad va a poder tener el sistema y menor va a ser la sensibilidad del mismo a las interferencias.

Para el filtro de forzado a cero vemos que también existe crecimiento pero que sin embargo, como hemos comentado, se pueden diferenciar las configuraciones en las que el número de antenas es menor que el número de usuarios ya que las prestaciones de este método decrecen drásticamente siendo incluso menores que las del filtro adaptado, el que se suponía de antemano el peor de los tres métodos.

Es cierto que para el método de Wiener también se podrían diferenciar tres grupos de prestaciones en función de que el número de antenas sea mayor, igual o menor que el de usuarios en el sistema (incluso se puede apreciar el cambio de curvatura, pasando de ser cóncavas a convexas) pero los valores mantienen una pauta clara y constante y no se pierde el rendimiento por lo que se podría decir que estas diferencias se pueden achacar a la mayor limitación por interferencia que sufren estas configuraciones, no como en el caso del método ZF (ya que sólo este último método está realmente mal condicionado para configuraciones con bajo número de antenas).

2. QPSK

2.1. Mayor número de antenas que de usuarios ($M=8$, $K=5$)

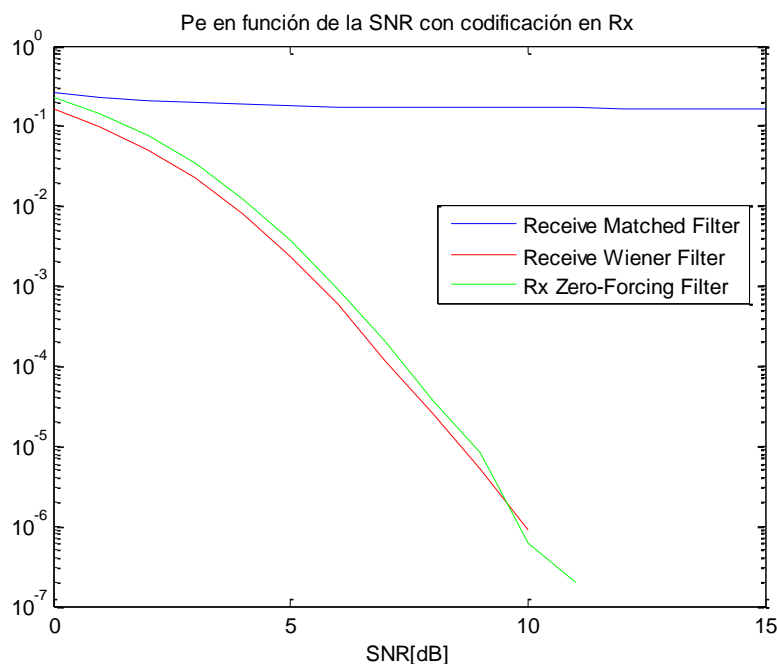


Ilustración 29 – BER en función de la SNR en caso de usar decodificación (QPSK, $M>K$)

Vemos que al utilizar codificación QPSK para transmitir la información, el comportamiento de los resultados para cada uno de los métodos es equivalente al que se presenta en caso de utilizar codificación BPSK salvo por una pérdida en los resultados de más o menos 1 dB que se puede aducir al utilizar una codificación más densa.

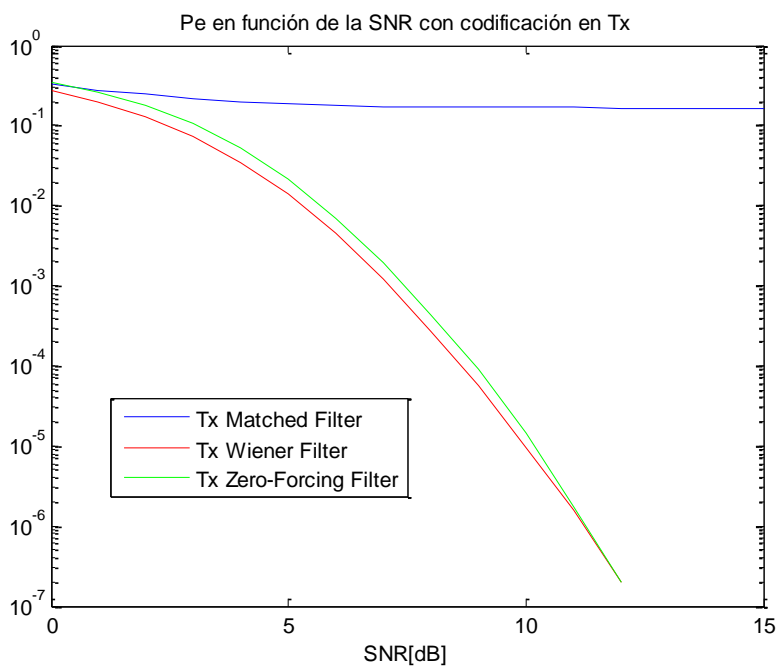


Ilustración 30 - BER en función de la SNR en caso de usar precodificación (QPSK, $M>K$)

En este caso sí que se puede apreciar una pequeña diferencia entre los resultados obtenidos al usar decodificación y precodificación, desplazamiento a la derecha de la segunda gráfica respecto a la primera, aunque la tónica de los métodos y la relación entre ellos (ecuaciones (33) y (34)) se mantengan para ambos casos.

Viendo los valores de las gráficas que nos atañen (*Ilustración 29, Ilustración 30*) podemos ver que al utilizar precodificación debemos utilizar en torno a 1dB más de potencia que en el caso del uso de decodificación para obtener los mismo resultados en lo que a probabilidad de error se refiere como podemos apreciar en la representación conjunta de ambos sistemas (*Ilustración 31*).

También podemos comprobar que este hecho no se produce para el caso de usar el método de filtro adaptado. La causa de este fenómeno se debe a que el filtro adaptado, tanto en decodificación como en precodificación, se encuentra muy limitado por la interferencia del resto de usuarios lo cual explica a su vez los pobres resultados en BER si comparamos con los otros métodos estudiados.

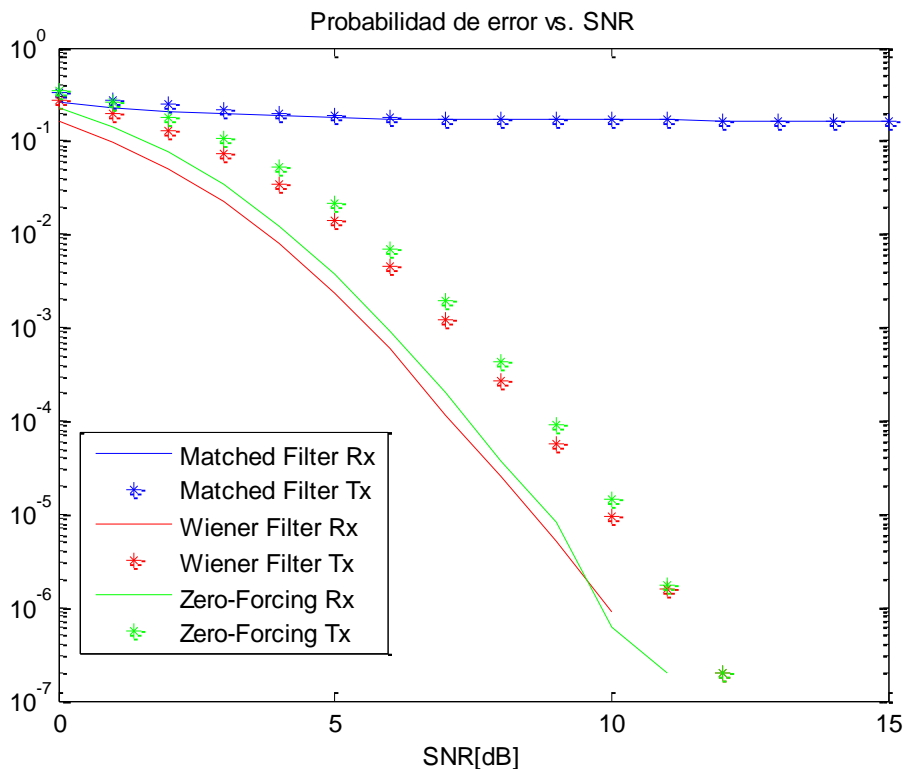


Ilustración 31 – BER en función de la SNR para ambos casos (QPSK, $M > K$)

2.2. Mayor número de usuarios que de antenas ($M=5$, $K=8$)

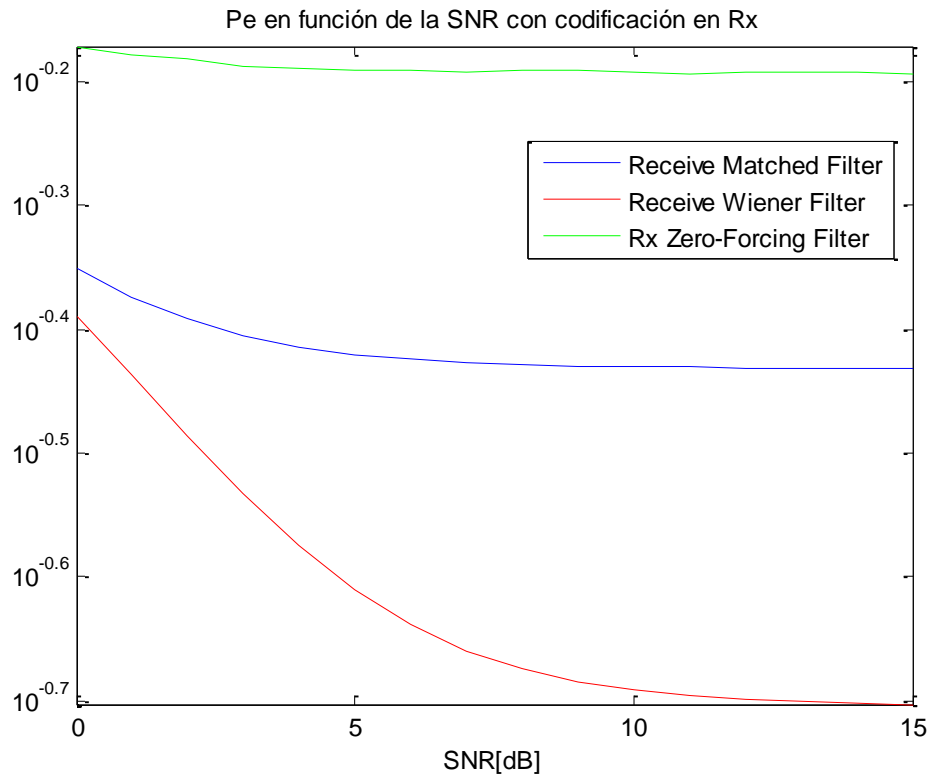


Ilustración 32 - BER en función de la SNR en caso de usar decodificación (QPSK, $M < K$)

Al igual que en el caso anterior, los resultados que presenta el sistema al utilizar QPSK son peores que los que podemos obtener al utilizar codificación BPSK, aunque en esta situación las diferencias son claramente superiores ya que al usar una constelación más densa, el aumento de errores de decisión que se produce en el caso peor condicionado es mucho mayor que en caso de que el número de antenas sea superior al de usuarios (caso bien condicionado).

Independientemente de los valores podemos ver que los métodos se comportan según lo esperado y acorde con lo visto al usar BPSK, es decir: las malas condiciones del sistema hacen que el rendimiento del filtro de forzado a cero empeore visiblemente y se convierta el peor método de los estudiados, los resultados se ven afectados por la interferencia interusuario lo que hace que el aumento de las prestaciones sea cada vez menor con el aumento de la relación señal a ruido llegando a existir una asíntota horizontal para los mismos, el aumento de la SNR hace que los valores obtenidos para los métodos de Wiener y de filtro adaptado se separen ostensiblemente, cuando eran parecidos para condiciones de relación señal a ruido baja.

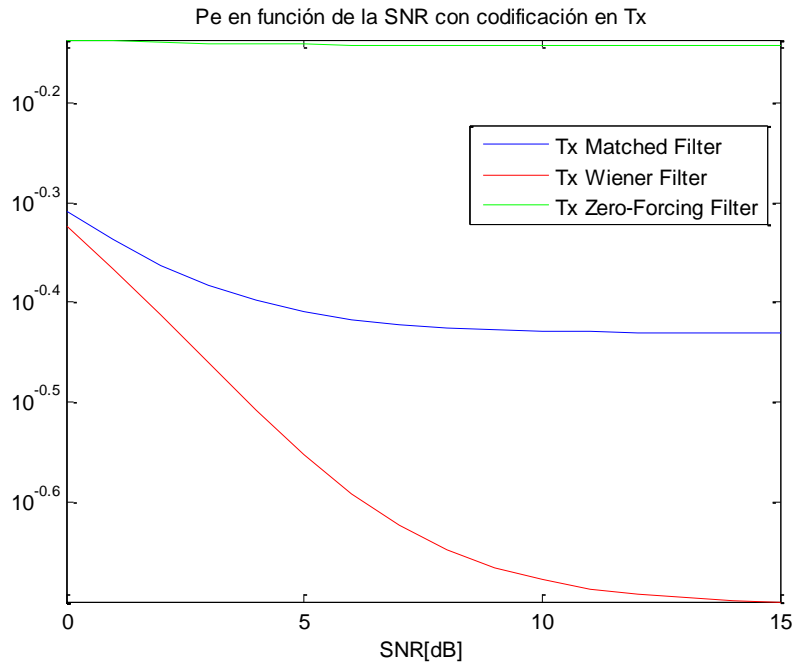


Ilustración 33 - BER en función de la SNR en caso de usar precodificación (QPSK, $M < K$)

En este caso, al estar trabajando en el supuesto en que las prestaciones de los métodos presentan menor variación con el aumento de la SNR, podemos observar que aunque sigue existiendo la misma diferencia en los respectivos valores (necesidad de usar 1dB más en el esquema con precodificación), ésta se hace menos notable y acaba desapareciendo con el aumento de la relación señal a ruido debido a la limitación en las prestaciones (excepto para el caso del filtro de forzado a cero pues alcanza rápidamente el valor asintótico, que es diferente para cada una de las situaciones).

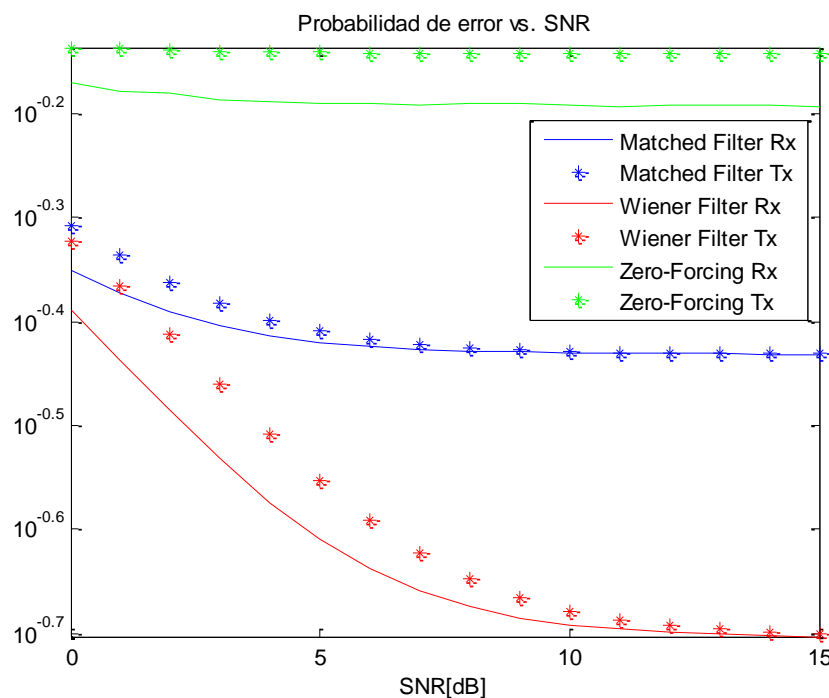


Ilustración 34 - BER en función de la SNR para ambos casos (QPSK, $M < K$)

2.3. Mismo número de antenas que de usuarios ($M=5$ y 8 , $K=5$ y 8)

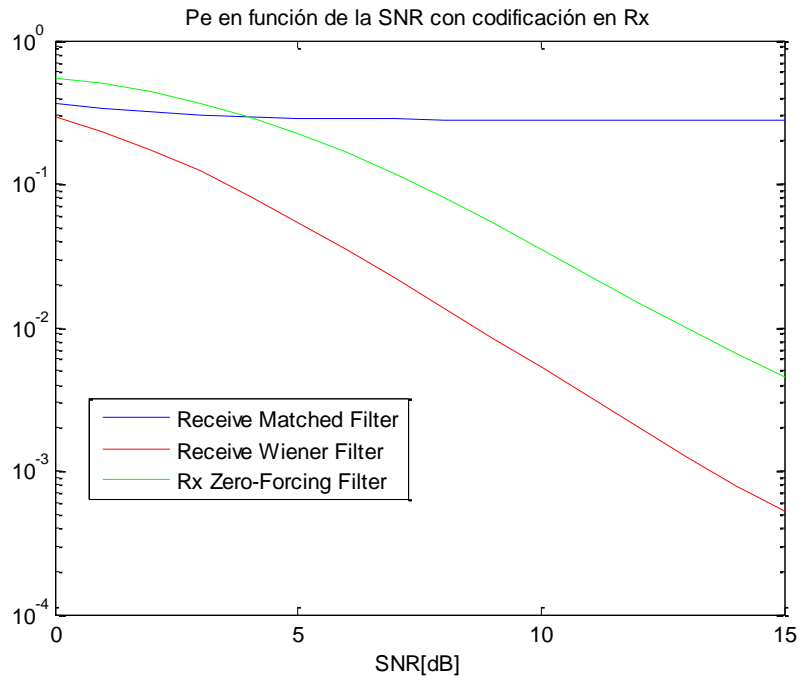


Ilustración 35 - BER en función de la SNR en caso de usar decodificación (QPSK, $M=K=8$)

Al igual que en las otras configuraciones para QPSK, comprobamos que el comportamiento del sistema es el mismo que si usásemos BPSK para todos los métodos de decodificación salvo por el hecho de que hay una pequeña pérdida de prestaciones para todos los filtros decodificadores.

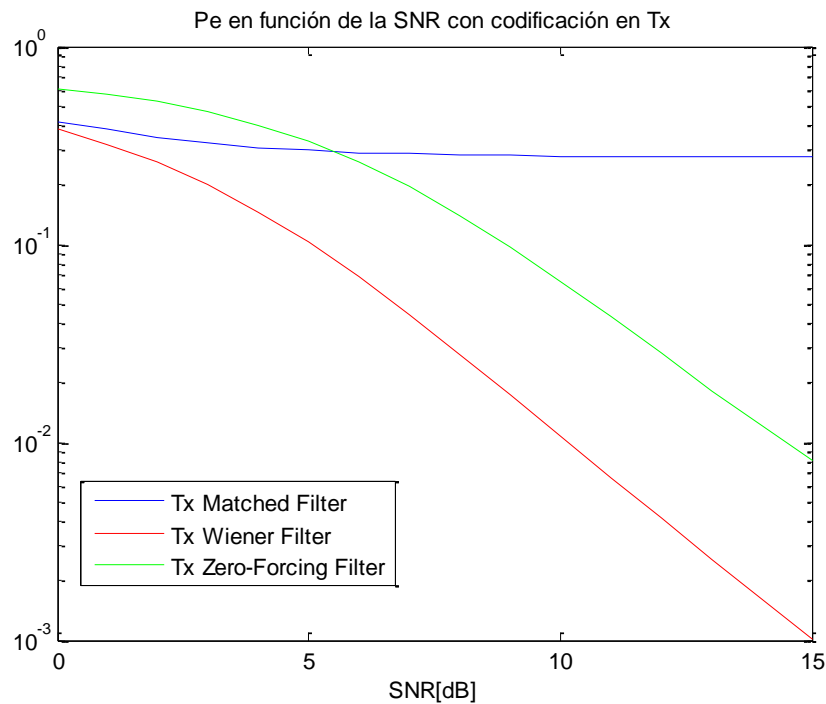


Ilustración 36 - BER en función de la SNR en caso de usar precodificación (QPSK, $M=K=8$)

Según la gráfica, las prestaciones de cada uno de los precodificadores y su evolución es la esperada: el filtro de Wiener es el que mejor rendimiento presenta para todo valor de relación señal a ruido, sus valores se parecen a los que se pueden obtener con el método de filtro adaptado para bajos niveles de SNR pero mejoran ostensiblemente según crece esta debido a que el precodificador de filtro adaptado se ve limitado por las interferencias rápidamente y, por último, el filtro de forzado a cero mejora claramente su rendimiento según crece la relación señal a ruido y, para altos valores de ésta, aproximará sus prestaciones a las del filtro de Wiener.

Sin embargo, como ya hemos visto en las otras comparaciones entre el uso de precodificación y decodificación para constelación QPSK, parece que los valores presentan un desplazamiento de 1dB aproximadamente con respecto a los que presentan los esquemas decodificadores.

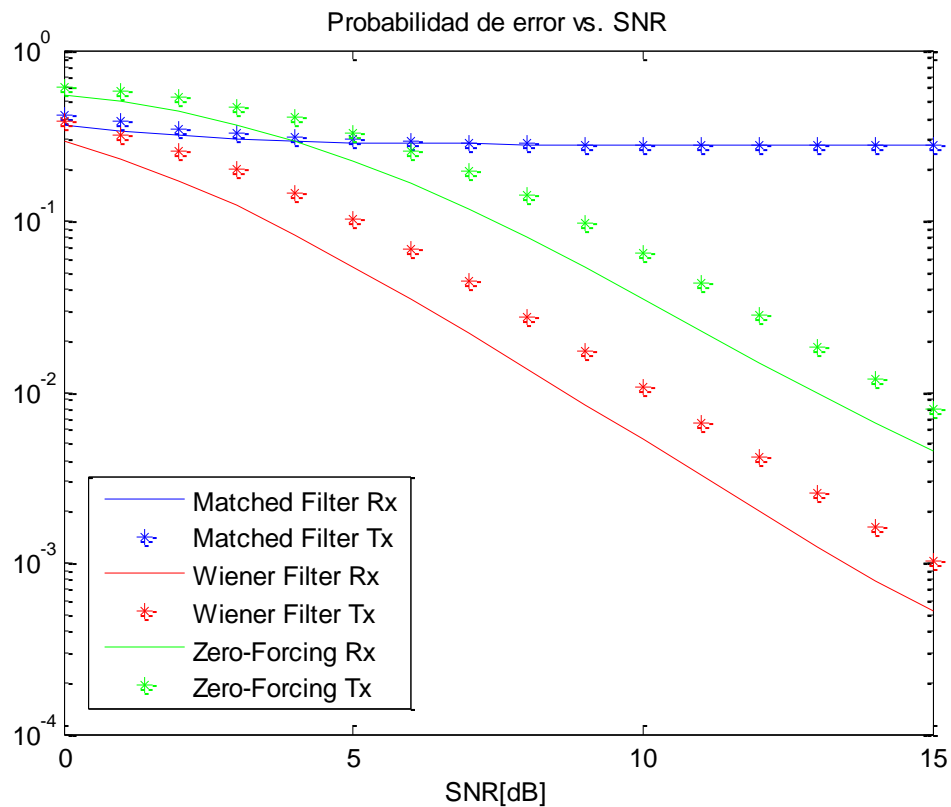


Ilustración 37 - BER en función de la SNR para ambos casos (QPSK, M=K=8)

2.4. Estudio de la influencia del número de antenas en las prestaciones

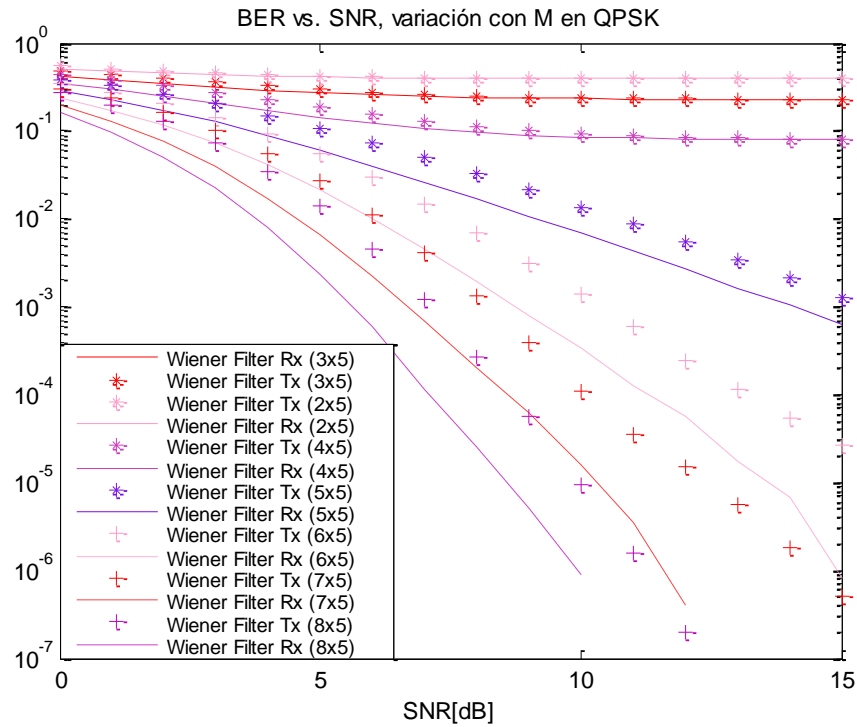


Ilustración 38 - Evolución de la BER con el número de antenas (Wiener, QPSK)

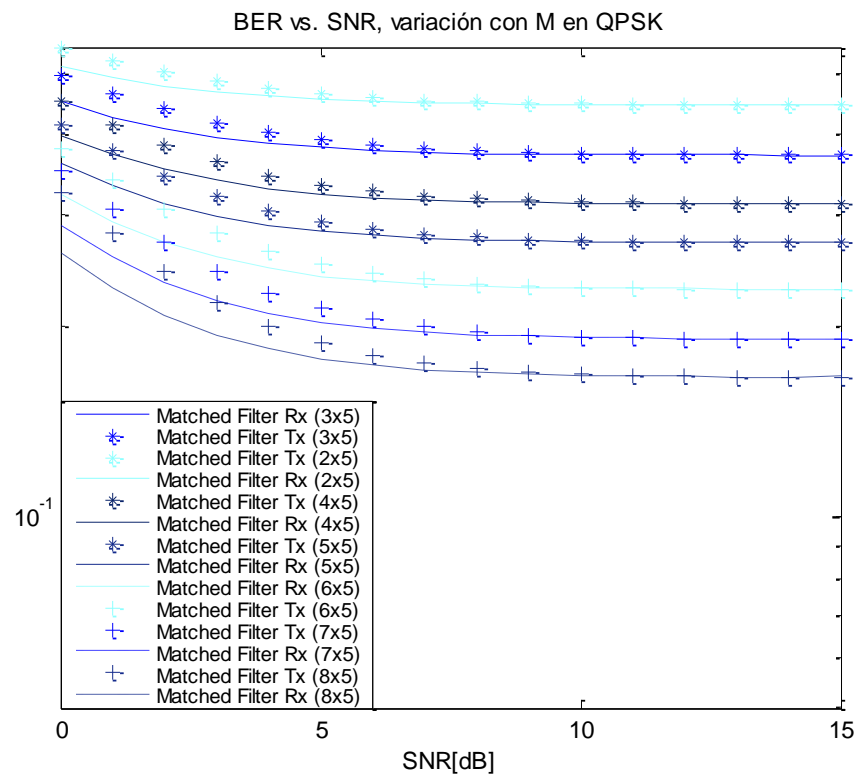


Ilustración 39 - Evolución de la BER con el número de antenas (Matched Filter, QPSK)

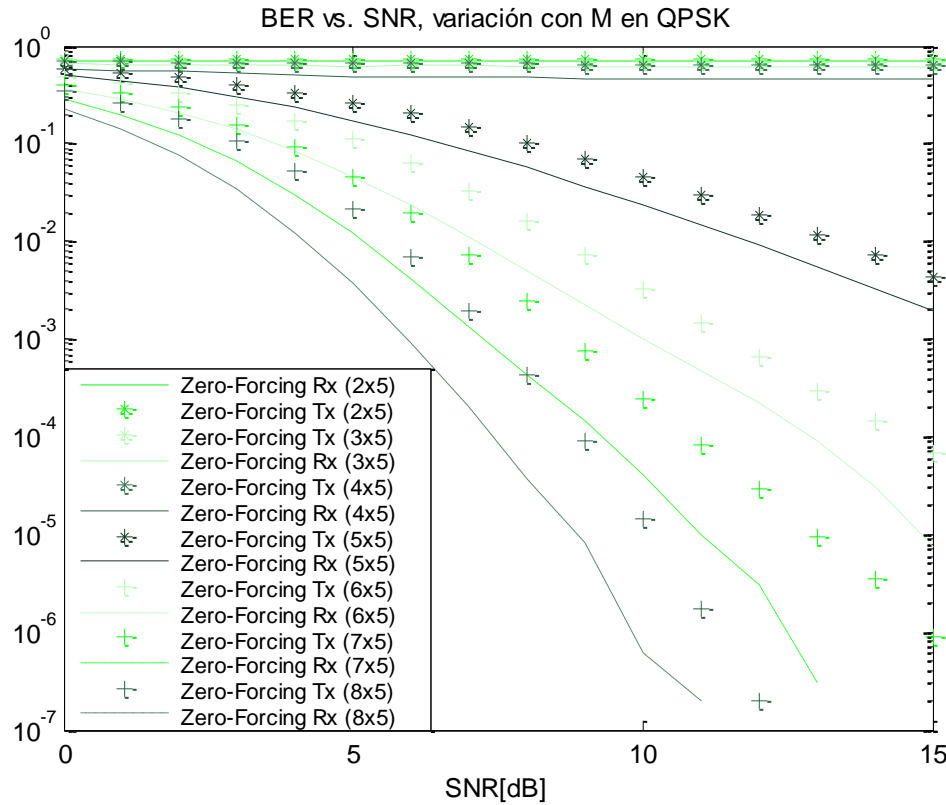


Ilustración 40 - Evolución de la BER con el número de antenas (ZF, QPSK)

A la vista de las gráficas podemos ver que el comportamiento de los métodos con la variación de M son equivalentes para BPSK y QPSK. Sin embargo, cuando usamos la codificación QPSK comprobamos que las prestaciones de precodificación y decodificación no son equivalentes, como para BPSK, sino que se diferencian en, más o menos, 1dB.

3. Condicionamiento del método de forzado a cero

Como ya hemos comentado con anterioridad, el método de forzado a cero no tiene las prestaciones esperadas, según va creciendo la relación señal a ruido el rendimiento debería ser cada vez más parecido al del método de Wiener. También hay que observar que cuando el sistema presenta menor número de antenas que de usuarios, los valores obtenidos al utilizar este método son netamente inferiores a las obtenidas en el resto, llegando a ser incluso menores que las del filtro adaptado, que era el filtro que de antemano esperábamos que tuviera peores prestaciones.

Para explicar este fenómeno debemos fijarnos en las ecuaciones a las que responden los filtros decodificador y precodificador de este método ((19) y (26) respectivamente). Al analizarlas, las dos ecuaciones presentan dos factores que hay que invertir ($(\mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P})^{-1}$ y $(\mathbf{G} \mathbf{H}^H \mathbf{G}^H)^{-1}$) de los que depende directamente.

El problema de condicionamiento del método ZF reside en la invertibilidad de dichos factores, de esta forma, en las configuraciones con mayor número de usuarios que de antenas, la matriz a invertir presenta menor rango que el máximo posible y contiene autovalores a cero (tantos como sea la diferencia entre las antenas y los usuarios), lo que va a hacer que esté mal condicionada a la hora de invertir. Este hecho va a repercutir en la matriz de decodificación y precodificación, y a las prestaciones por ende.

Estos términos también están presentes en el método de Wiener ((21) para decodificación y (30) para precodificación) pero no afectan directamente ya que las ecuaciones de este método presentan un factor de regularización (\mathbf{R}_u^{-1} y $\frac{\text{tr}(\mathbf{G}\mathbf{R}_n\mathbf{G}^H)}{E_{tr}}\mathbf{I}$ respectivamente) que evitan el efecto que se produce para el método de forzado a cero. Estos sumandos dependen inversamente de la relación señal a ruido, lo que explica que, según crece ésta, el rendimiento del filtro ZF se acerque cada vez más al del método de Wiener.

Para corroborar esta hipótesis vamos a representar las prestaciones de los métodos de Wiener y de forzado a cero y de sus equivalentes utilizando una de las propiedades de la inversión de matrices:

$$\mathbf{W}_{Wiener_trans}^{tx} = \sqrt{\frac{E_{tr}}{\text{tr}\left(\left(\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \frac{\text{tr}(\mathbf{R}_n)}{E_{tr}}\mathbf{I}\right)^{-2} \mathbf{H}^H \mathbf{R}_u \mathbf{H}\right)}} \mathbf{H}^H \left(\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \frac{\text{tr}(\mathbf{R}_n)}{E_{tr}}\mathbf{I}\right)^{-1} \quad (37)$$

$$\mathbf{W}_{ZF_trans}^{tx} = \sqrt{\frac{E_{tr}}{\text{tr}((\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{R}_u)}} (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \quad (38)$$

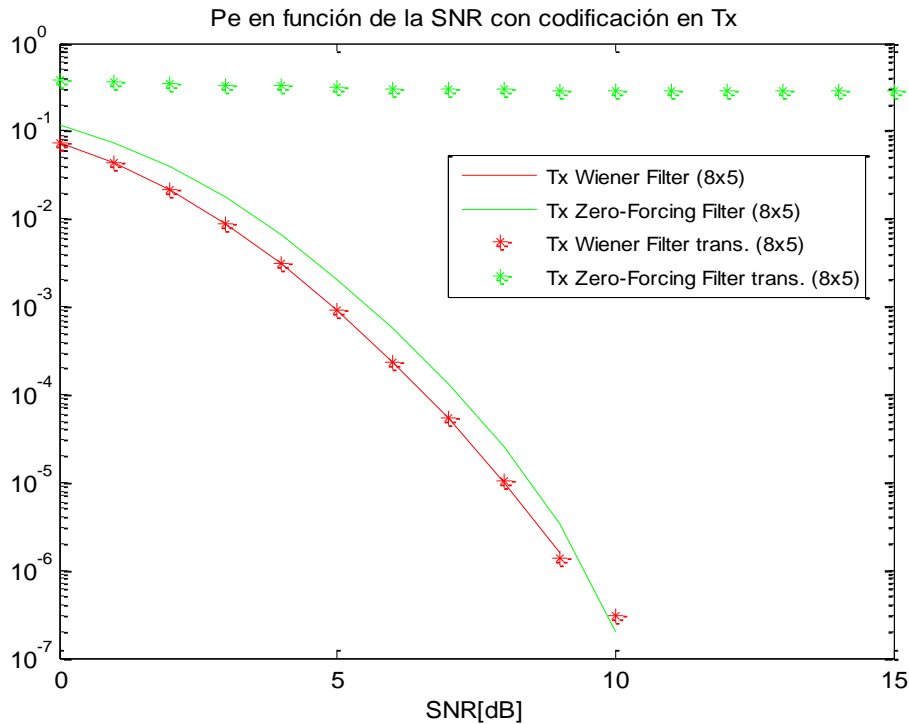


Ilustración 41 - Comparación métodos y equivalentes transpuestos ($M > K$, BPSK)

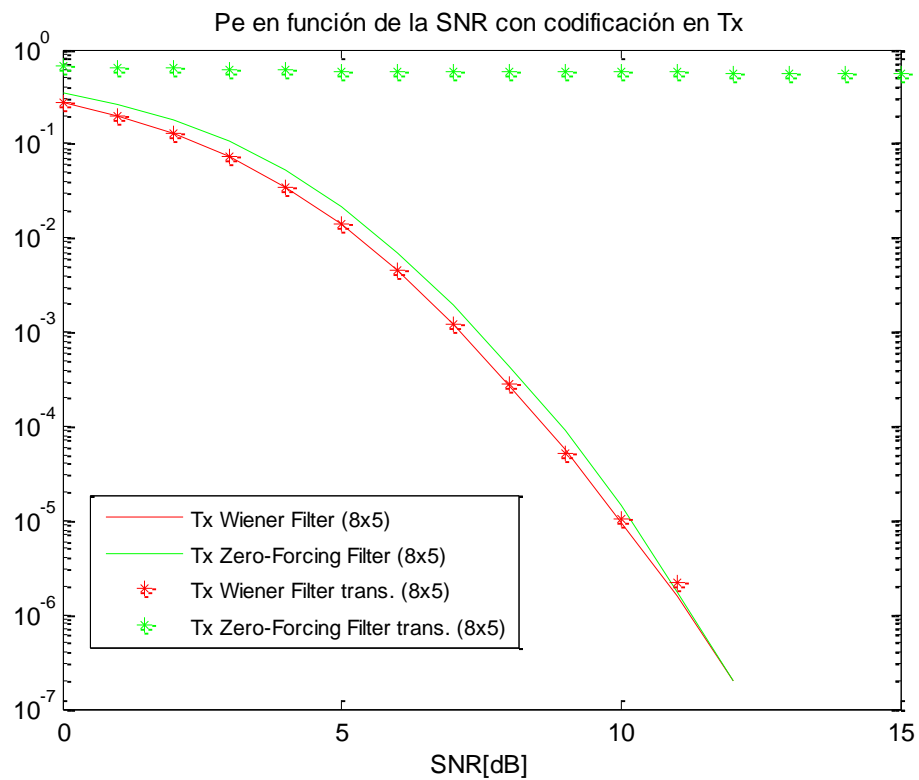


Ilustración 42 - Comparación métodos y equivalentes transpuestos ($M > K$, QPSK)

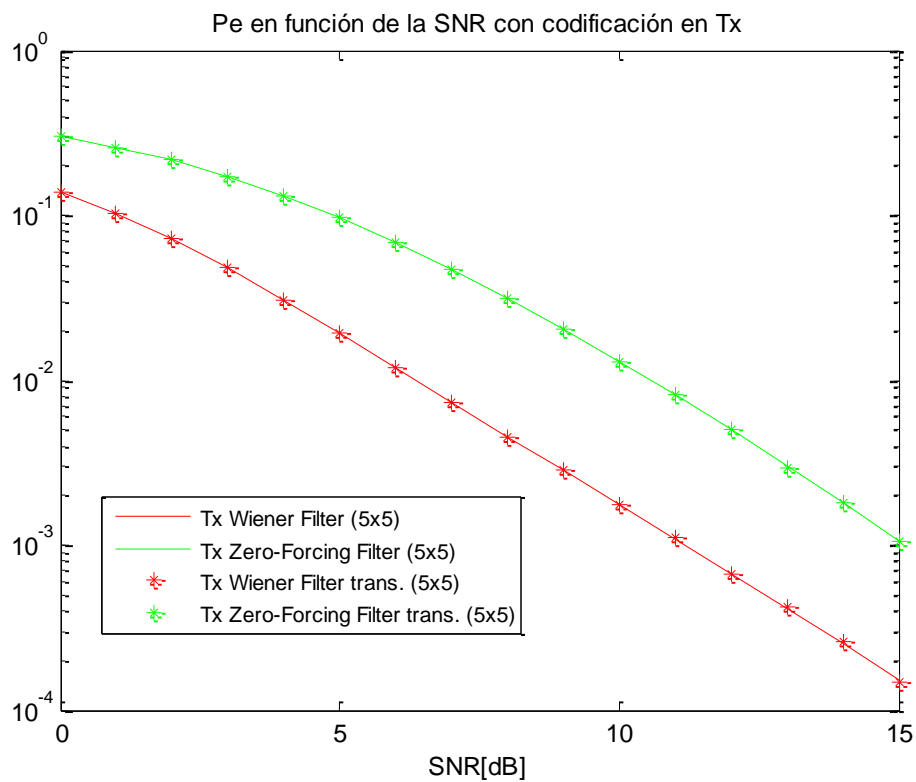


Ilustración 43 - Comparación métodos y equivalentes transpuestos ($M = K = 5$, BPSK)

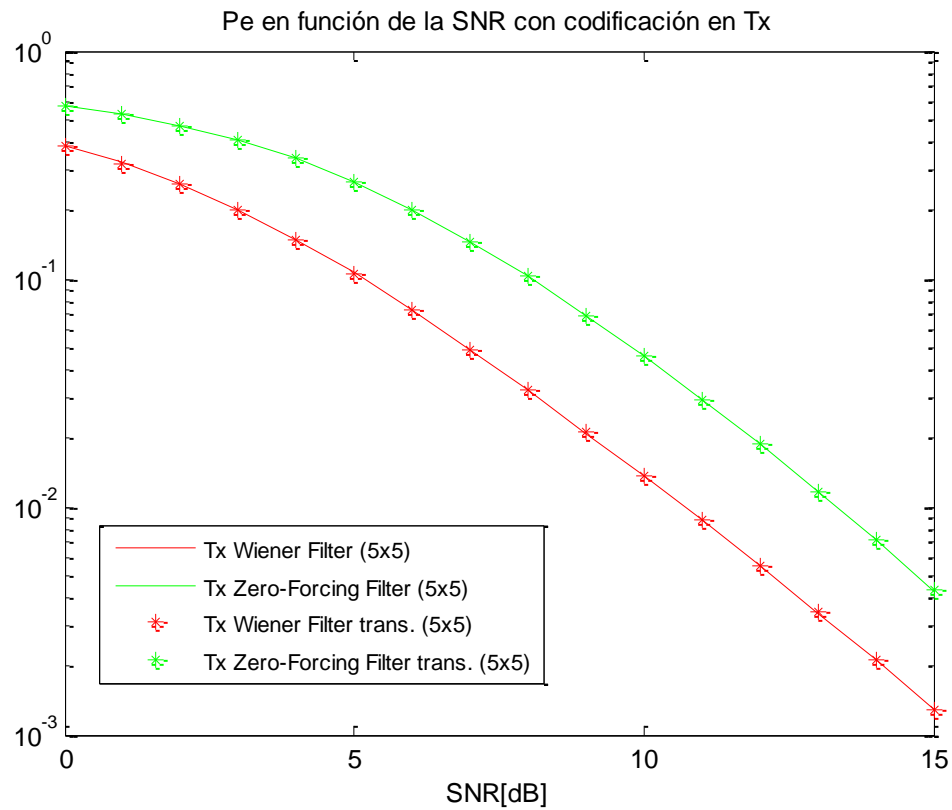


Ilustración 44 - Comparación métodos y equivalentes transpuestos ($M=K=5$, QPSK)

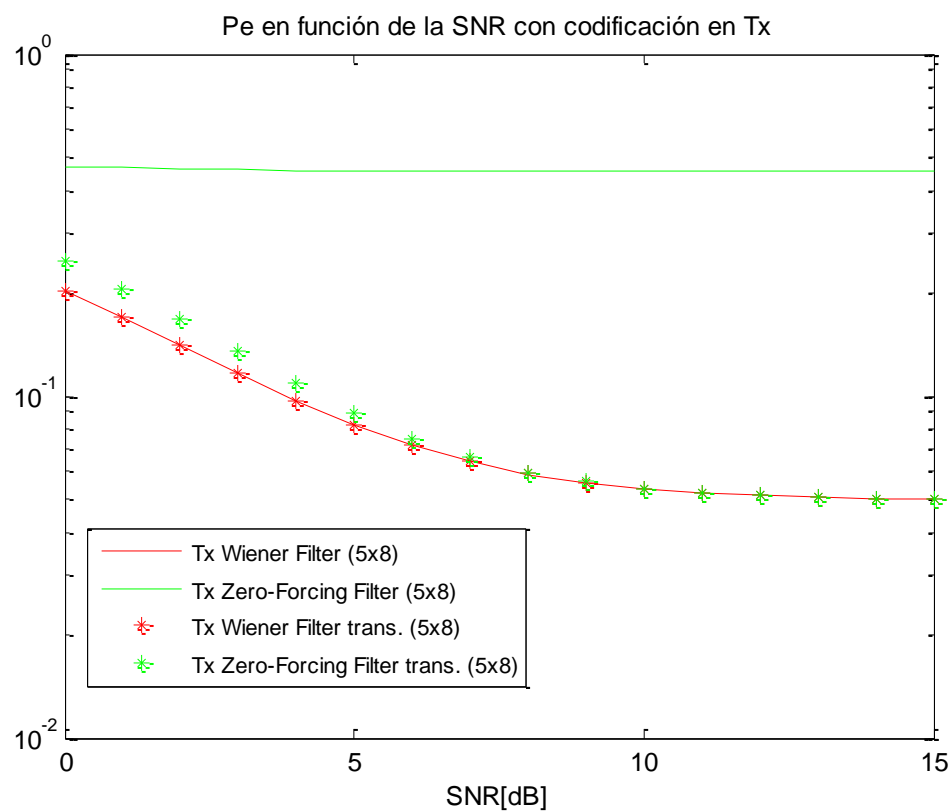


Ilustración 45 - Comparación métodos y equivalentes transpuestos ($M<K$, BPSK)

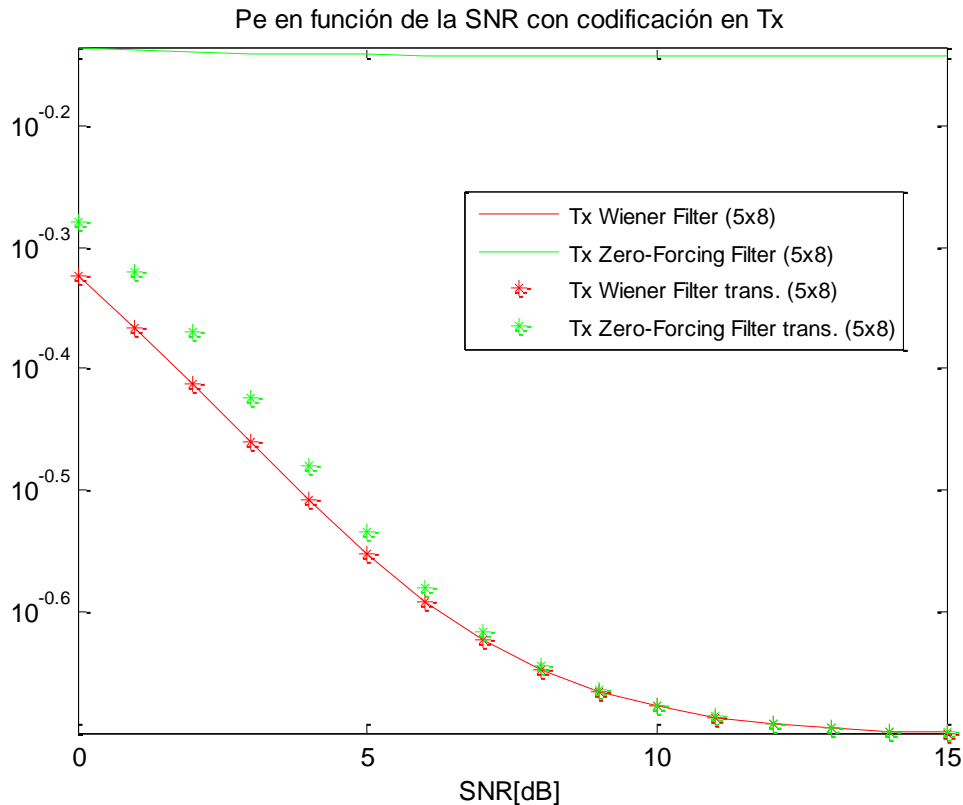


Ilustración 46 - Comparación métodos y equivalentes transpuestos ($M < K$, QPSK)

Efectivamente, en las gráficas podemos ver que cuando el número de antenas es mayor que el de usuarios las prestaciones del método de forzado a cero son prácticamente iguales a las que presenta el método de Wiener mientras que el equivalente transpuesto presenta un rendimiento muy inferior, al contrario que el equivalente transpuesto de Wiener que tiene los mismos valores que la formulación normal para todas las configuraciones.

Las prestaciones del filtro ZF y su equivalente sólo son iguales si los números de antenas y usuarios son iguales, configuración para la que ya el rendimiento de ambos métodos se va igualando.

Sin embargo, cuando el número de usuarios es mayor que el de antenas del sistema es el transpuesto equivalente, y no la formulación normal del método de forzado a cero, el que presenta un rendimiento parecido al del método de Wiener.

Así podemos concluir que el rendimiento sí está relacionado con la invertibilidad y las dimensiones de los sumandos a invertir como proponíamos ya que:

- Las prestaciones de las dos formulaciones del método ZF sólo son equivalentes en el caso de igualdad en los números de antenas y usuarios: $M = K \rightarrow M \times K = K \times M = M \times M$ por lo que el rango del término a invertir va a ser el máximo.

- Si los números no son iguales, cuando una formulación es subóptima la otra es la óptima ya que si para unos números dados el rango no es el máximo, si utilizamos la formulación transpuesta, la dimensión del término varía y hace que el rango máximo por dimensión sea igual al óptimo del término a invertir:

$M > K$:

$$\begin{aligned} M \times K * K \times M &= M \times M \rightarrow rg_{max} = M \text{ pero } rg_{opt} = K \\ K \times M * M \times K &= K \times K \rightarrow rg_{max} = K \text{ y } rg_{opt} = K \end{aligned}$$

$M < K$:

$$\begin{aligned} M \times K * K \times M &= M \times M \rightarrow rg_{max} = M \text{ y } rg_{opt} = M \\ K \times M * M \times K &= K \times K \rightarrow rg_{max} = K \text{ pero } rg_{opt} = M \end{aligned}$$

Información mutua

1. BPSK

1.1. Mayor número de antenas que de usuarios (M=8, K=5)

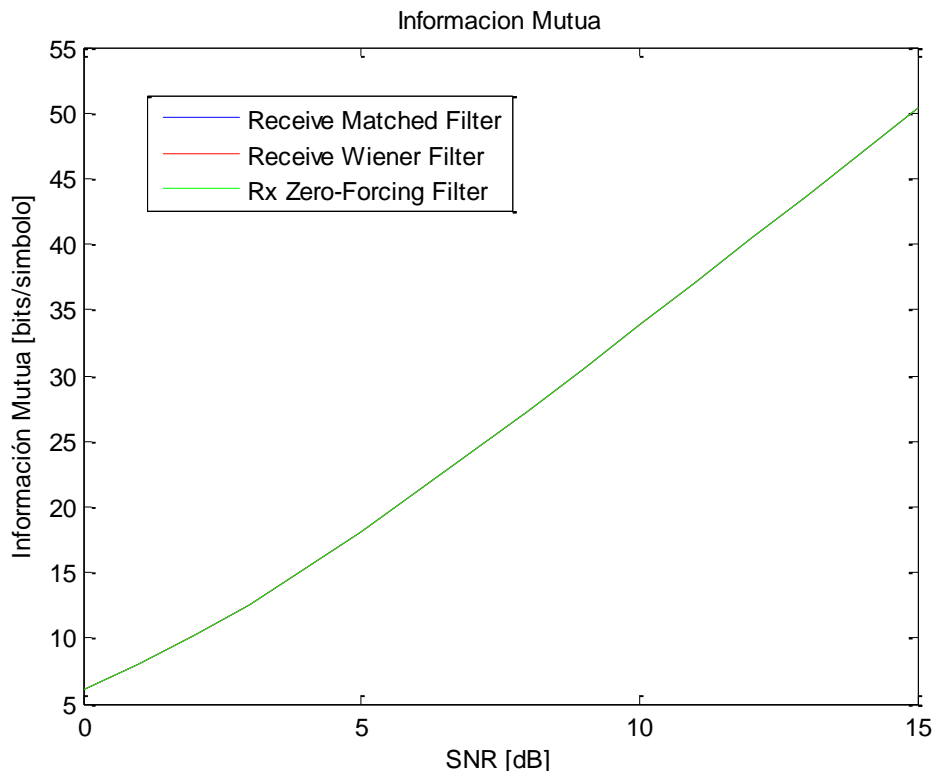


Ilustración 47 – Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar decodificación (BPSK, M>K)

Podemos ver según la gráfica que, como podría esperarse, según crece la relación señal a ruido aumenta la información mutua para todos los métodos de decodificación. En el caso de la decodificación, al estar trabajando con el mismo canal y no aplicar ninguna transformación previa al paso por el canal a la señal a transmitir, obtenemos que la información mutua de los métodos es siempre la misma.

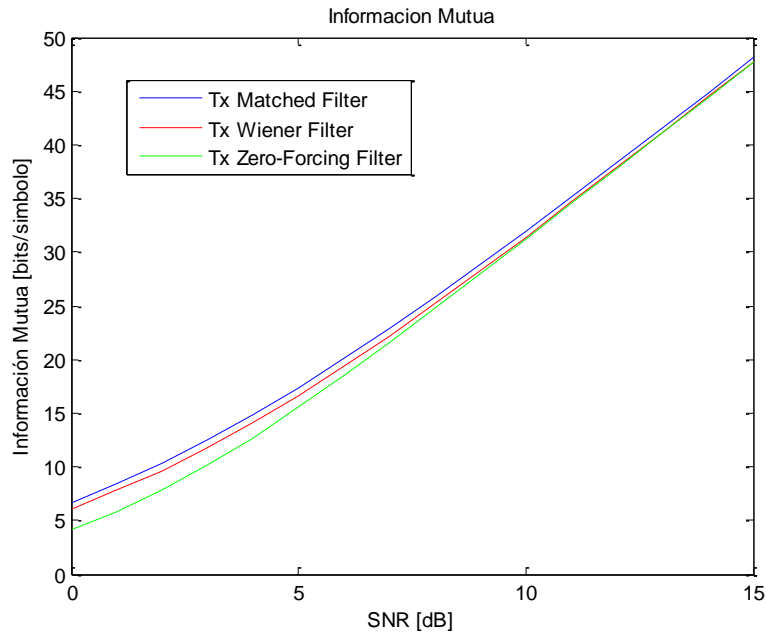


Ilustración 48 – Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar precodificación (BPSK, $M > K$)

Comprobamos que en el caso de aplicar precodificación sí vamos a encontrar diferencia en la información mutua para cada uno de los métodos utilizados ya que al hacerlo las señales transmitidas en cada caso son diferentes. Vemos que el método de filtro adaptado es el que presenta mayor información mutua para todo valor de relación señal a ruido aunque según crece ésta, las prestaciones de los métodos se van igualando.

Para comparar las prestaciones de ambos casos, uso de decodificación y precodificación, vamos a representar conjuntamente las prestaciones de ambas configuraciones:

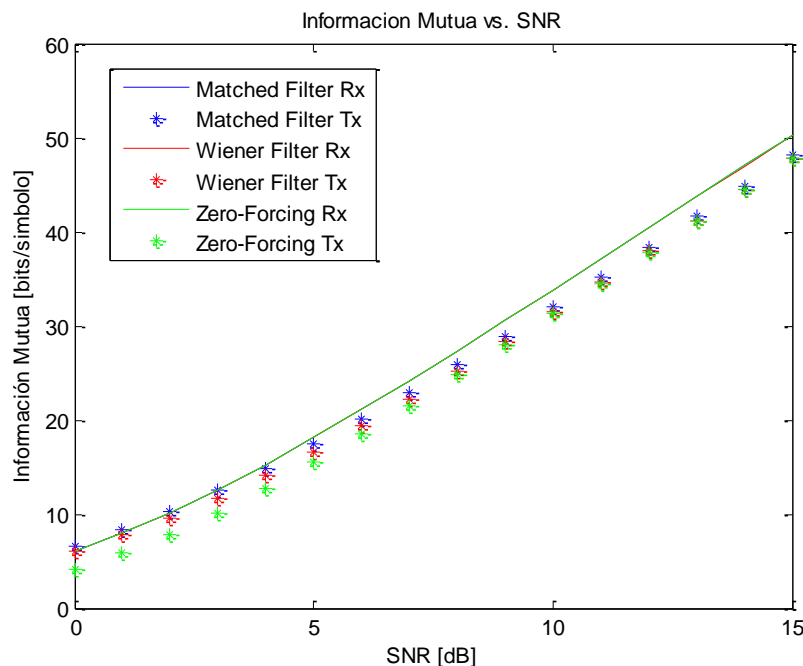


Ilustración 49 – Inf. Mutua en función de la SNR para ambos casos (BPSK, $M > K$)

Vemos que, a diferencia de lo que ocurre en lo que BER se refiere, el uso de decodificación y de precodificación en el caso de la información mutua existen diferencias de prestación entre ambas configuraciones, aunque las diferencias en sí no sean realmente representativas.

1.2. Mayor número de usuarios que de antenas ($M=5$, $K=8$)

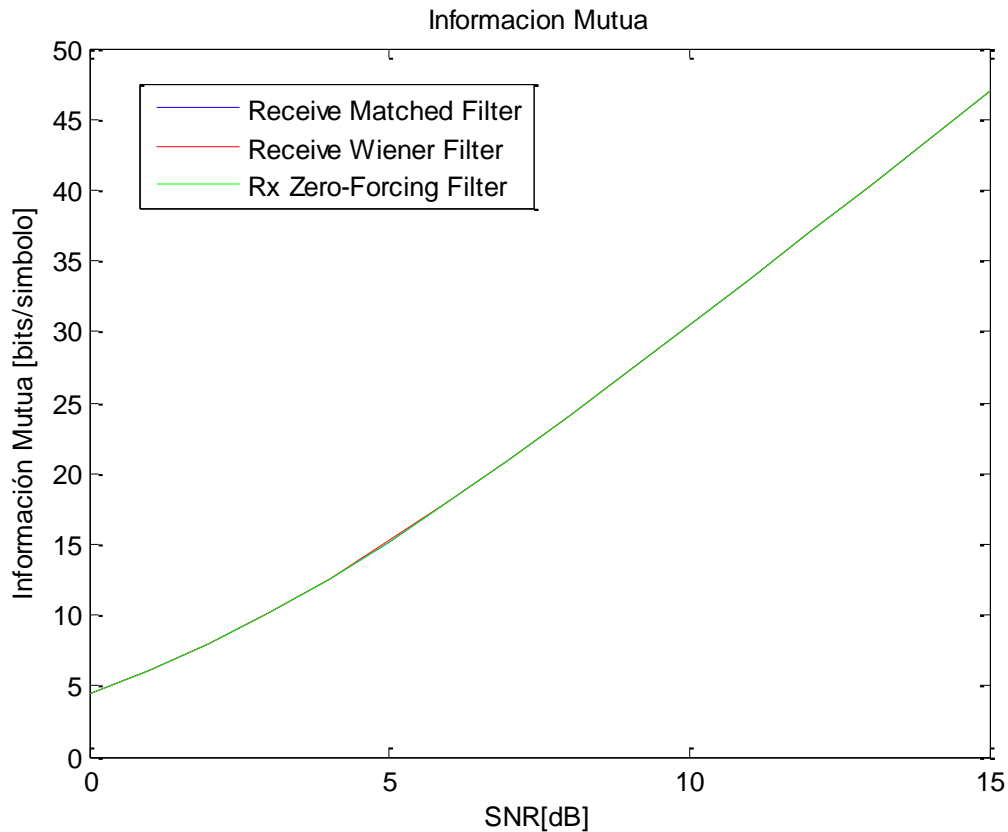


Ilustración 50 – Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar decodificación (BPSK, $M < K$)

Comprobamos que la información mutua para los tres métodos sigue siendo igual en caso de tener menos antenas que usuarios en el sistema aunque los valores sean algo menores que para la configuración con mayor número de antenas.

Siguiendo con este paralelismo, los resultados de información mutua para el uso de la precodificación deberían ser muy parecidos a los que hemos obtenido en caso de usar decodificación y algo inferiores a los obtenidos para la configuración con mayor número de antenas.

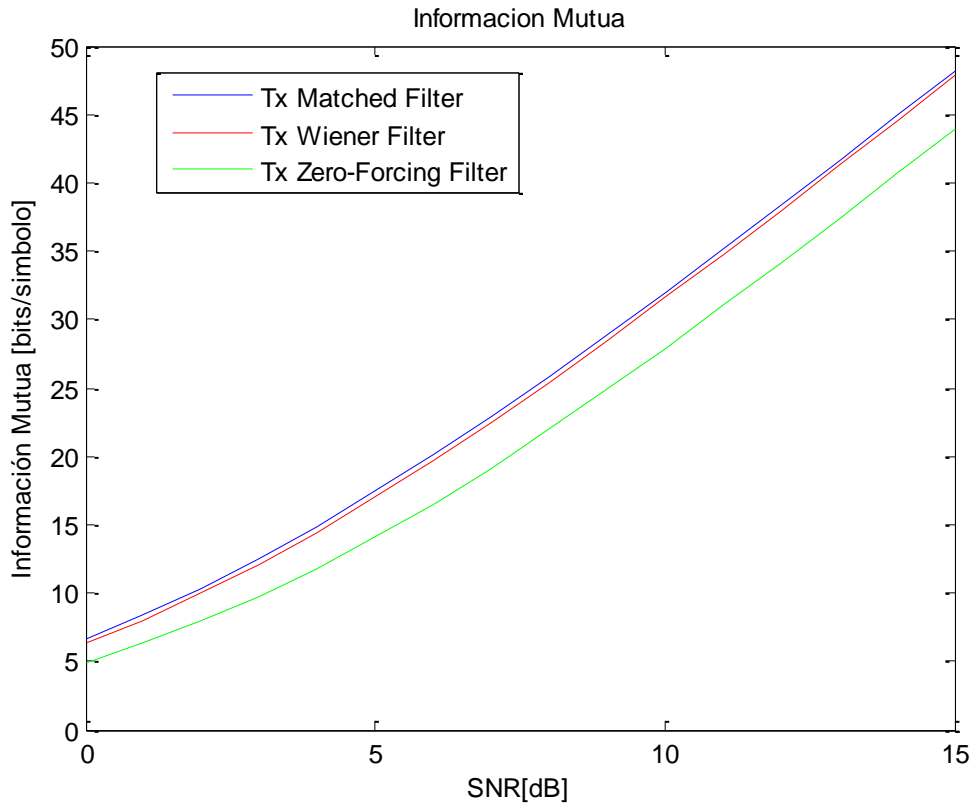


Ilustración 51 – Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar precodificación (BPSK, $M < K$)

Comprobamos que efectivamente las prestaciones, en lo que a información mutua se refiere, no varían mucho en caso de usar decodificación o precodificación, y que los valores obtenidos para la configuración con mayor número de usuarios que de antenas en el sistema son menores. Sin embargo, esta diferencia no es tan grande como pudiera ser en lo que a BER se refiere.

Para poder ver con mayor detalle la comparación entre el uso de la decodificación y la precodificación presentamos la siguiente gráfica:

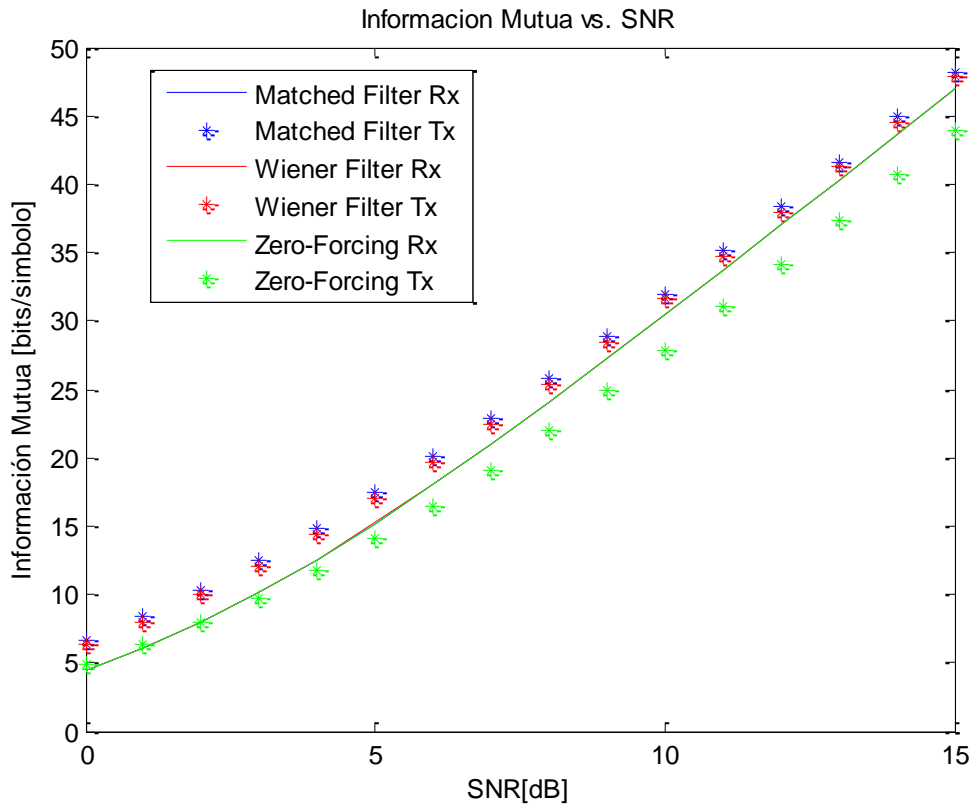


Ilustración 52 - Inf. Mutua en función de la SNR para ambos casos (QPSK, $M < K$)

Así, dentro de lo esperado, los valores de ambos métodos están muy próximos, siendo mayores en precodificación para los métodos de Wiener y filtro adaptado mientras que el filtro de forzado a cero presenta mejores prestaciones en caso de usar decodificación mientras que para el uso de precodificación presenta las peores prestaciones del conjunto.

De forma distinta a lo que sucede en el caso de que $M > K$, si el número de antenas del sistema es menor que el de usuarios, según crece la relación señal a ruido, las prestaciones de los tres métodos no convergen entre sí sino que el método de forzado a cero se separa más y más de los otros dos filtros.

1.3. Mismo número de antenas que de usuarios ($M=5$ y 8 , $K=5$ y 8)

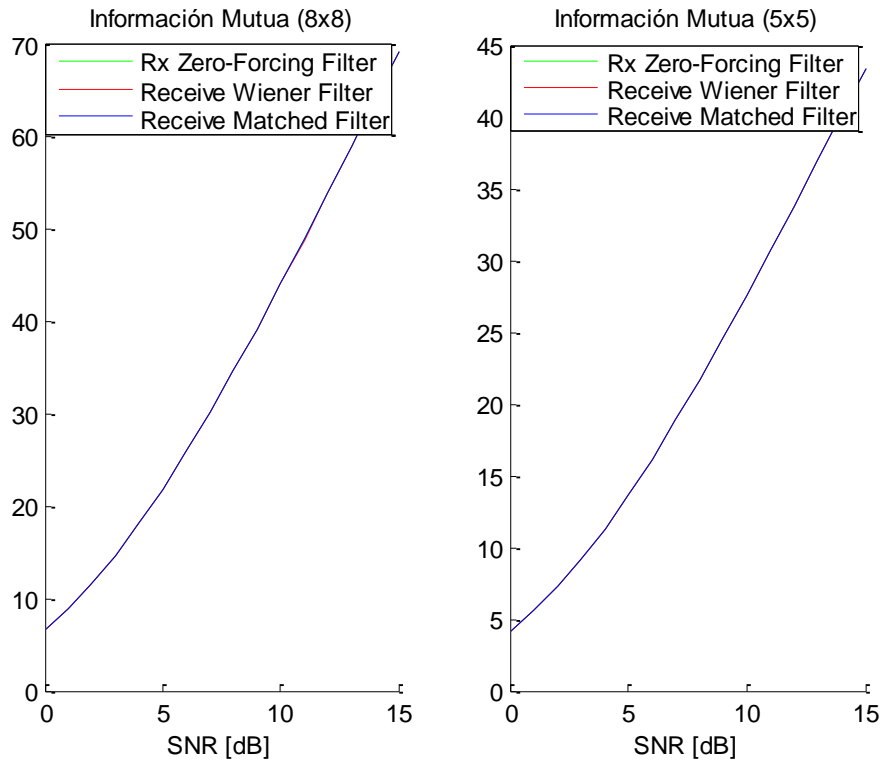


Ilustración 53 - Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar decodificación (BPSK, $M=K$)

Vemos por la gráfica que, al igual que en los casos anteriores, las prestaciones de los métodos de decodificación son equivalentes para todos los valores de la relación señal a ruido representados.

A la vista de la gráfica podemos empezar a ver condiciones para la evolución de la información mutua. En comparación con el resto de configuraciones del sistema, vemos que, en el caso de la configuración 8x8 (es decir, ocho antenas y ocho usuarios en el sistema), la información mutua se dispara con respecto a los valores obtenidos en las otras dos configuraciones ($M=8$ y $K=5$, y $M=5$ y $K=8$).

Si comparamos entre sí las gráficas de la información mutua para las dos configuraciones con mismo número de antenas que de usuarios (8x8 y 5x5), comprobamos que existe el mismo salto en la información mutua pero el comportamiento y la evolución de los métodos son los mismos para ambas configuraciones. De estos hechos podemos concluir que, al encontrarnos con sistemas con la misma configuración ($M=K$), los métodos tienen el mismo comportamiento y que el salto en información mutua radica en la diferencia de usuarios.

También podemos ver que los valores obtenidos en el sistema 5x5 son muy similares a los obtenidos en las configuraciones 5x8 y 8x5 y que los resultados de información mutua para la configuración 5x8 son más parecidos a los de la configuración con $M>K$, 8x5, que a la configuración 8x8 a pesar de que tiene el mismo número de usuarios.

De esta forma, podemos asegurar que la información mutua tiene dependencia tanto con el número de antenas como con el número de usuarios, al contrario de lo que pasaba con la probabilidad de error que dependía principalmente de la diferencia M-K. Si analizamos la ecuación que estamos utilizando para calcular la información mutua, (35), y a raíz de lo que hemos expuesto anteriormente, podemos decir que la información mutua va a estar principalmente limitada por el mínimo de entre los número de antenas y usuarios ya que es lo que va a condicionar la dimensión y los valores de la matriz de correlación de la señal de información.

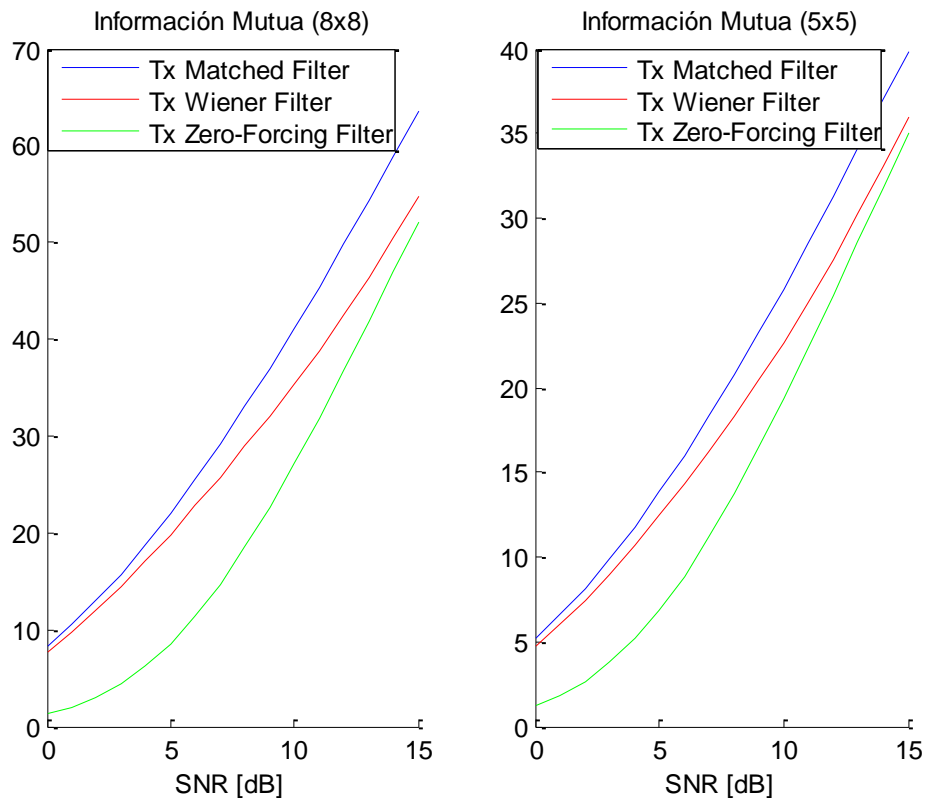


Ilustración 54 - Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar precodificación (BPSK, M=K)

Al igual que en el caso de la decodificación, la información mutua crece con respecto a las otras configuraciones para la configuración 8x8 y se mantiene con unas prestaciones similares para la 5x5, aunque, al estar usando precodificación, las prestaciones de los métodos no convergen, el método de filtro adaptado es el que presenta mejores prestaciones mientras que el filtro de forzado a cero es el de peor rendimiento a lo que información mutua se refiere.

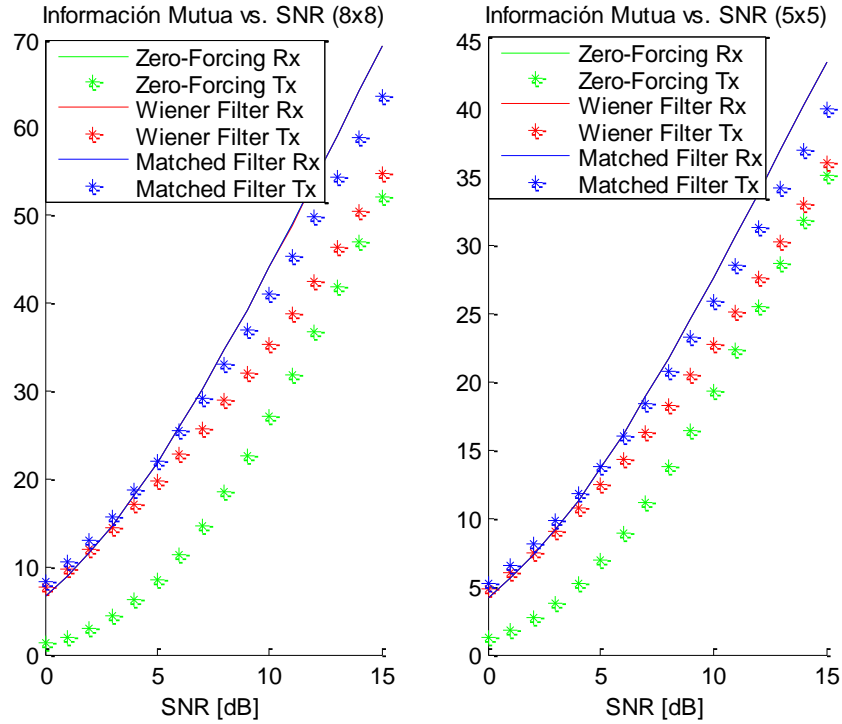


Ilustración 55 - Inf. Mutua en función de la SNR para ambos casos (BPSK, $M=K$)

1.4. Estudio de la influencia del número de antenas en las prestaciones

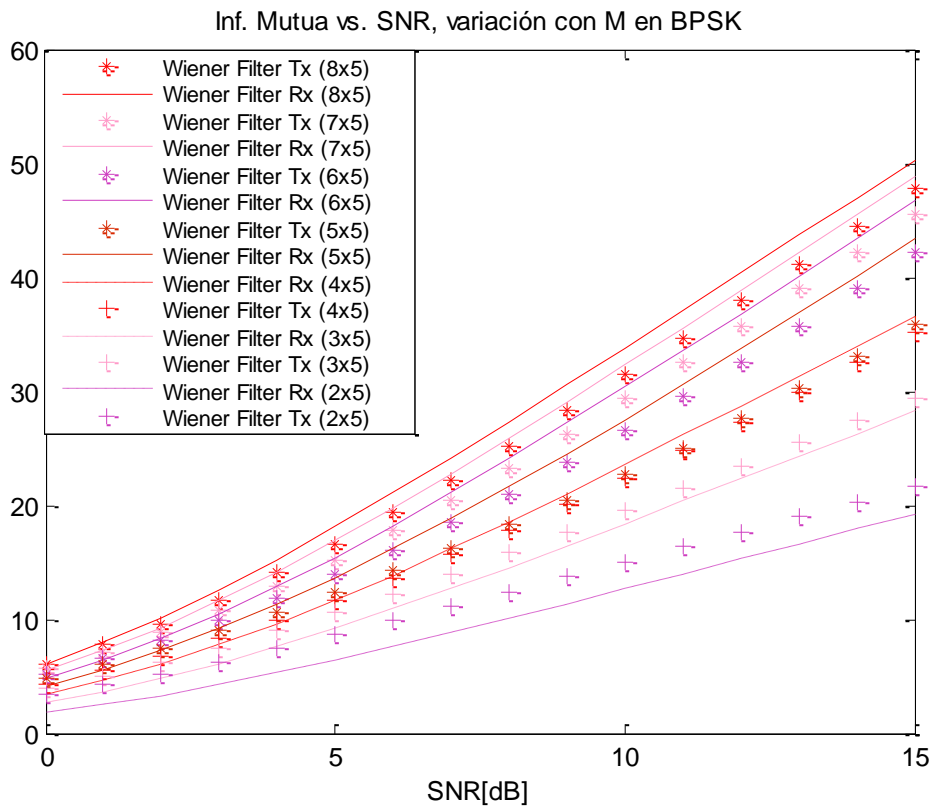


Ilustración 56 - Evolución de la Inf. Mutua con el número de antenas (Wiener, BPSK)

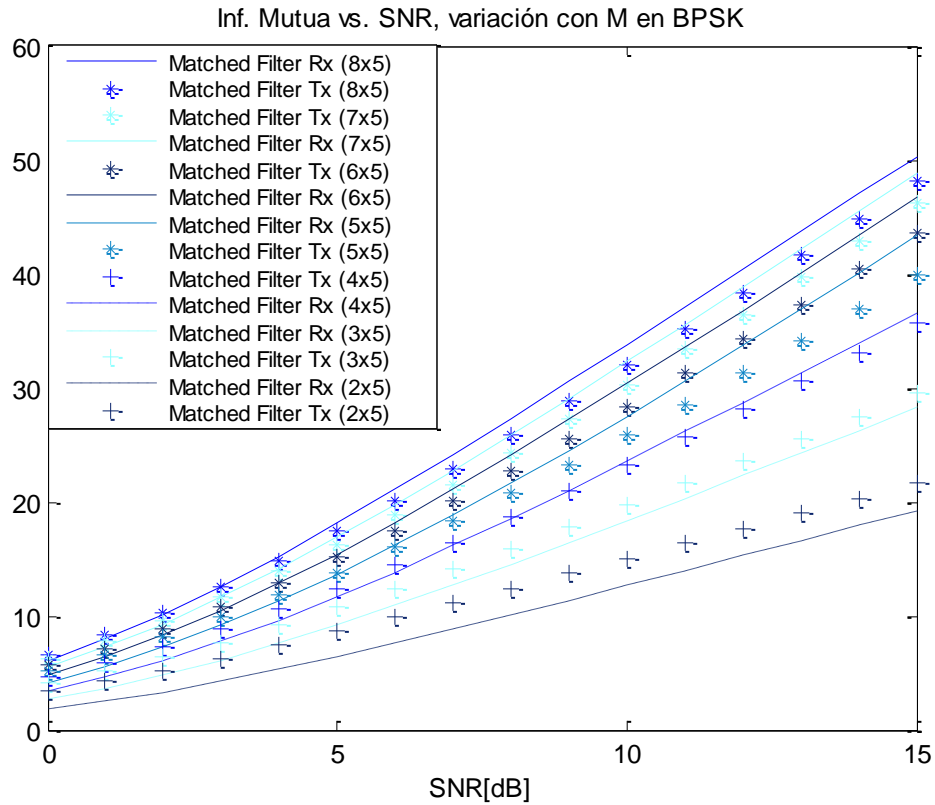


Ilustración 57 - Evolución de la Inf. Mutua con el número de antenas (Matched Filter, BPSK)

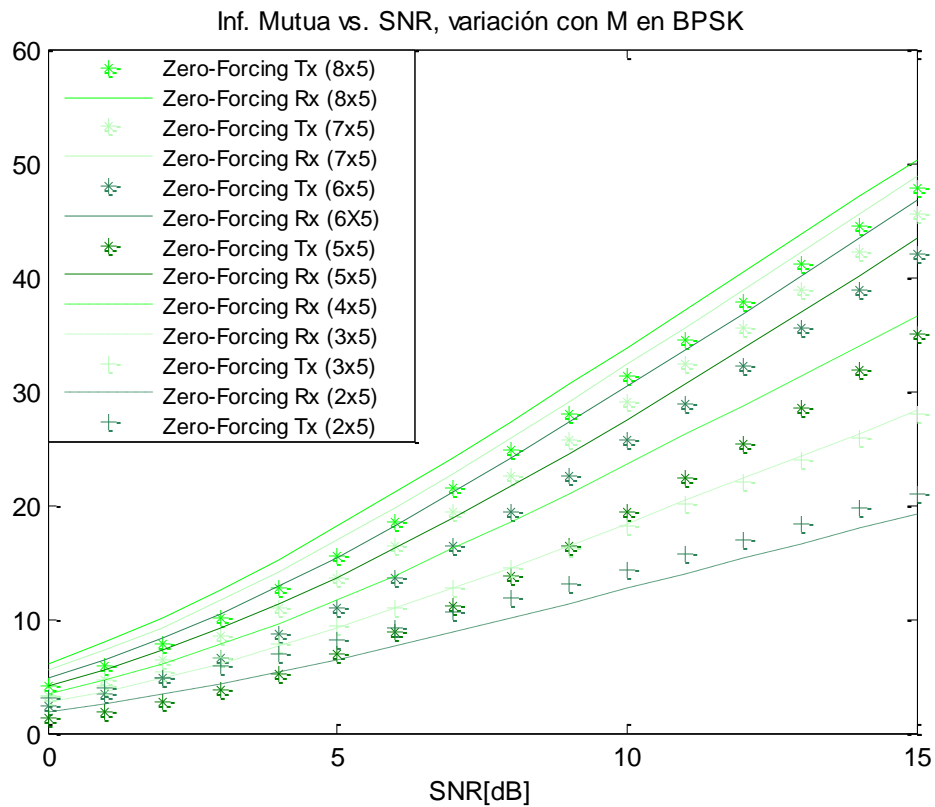


Ilustración 58 - Evolución de la Inf. Mutua con el número de antenas (ZF, BPSK)

Comprobamos que los tres métodos presentan un comportamiento y una tasa de crecimiento similar con el aumento del número de antenas del sistema. Vemos así que los valores máximo y mínimo para cada uno de los métodos y configuraciones son similares, que la tónica de las curvas con la relación señal a ruido de los tres métodos son parecidas y que para todos ellos los valores obtenidos para la decodificación son mayores que los respectivos de precodificación para aquellas configuraciones en las que el número de antenas es mayor que el de usuarios mientras que para aquellas en que es menor, las prestaciones de la precodificación es ligeramente mayor.

2. QPSK

2.1. Mayor número de antenas que de usuarios ($M=8$, $K=5$)

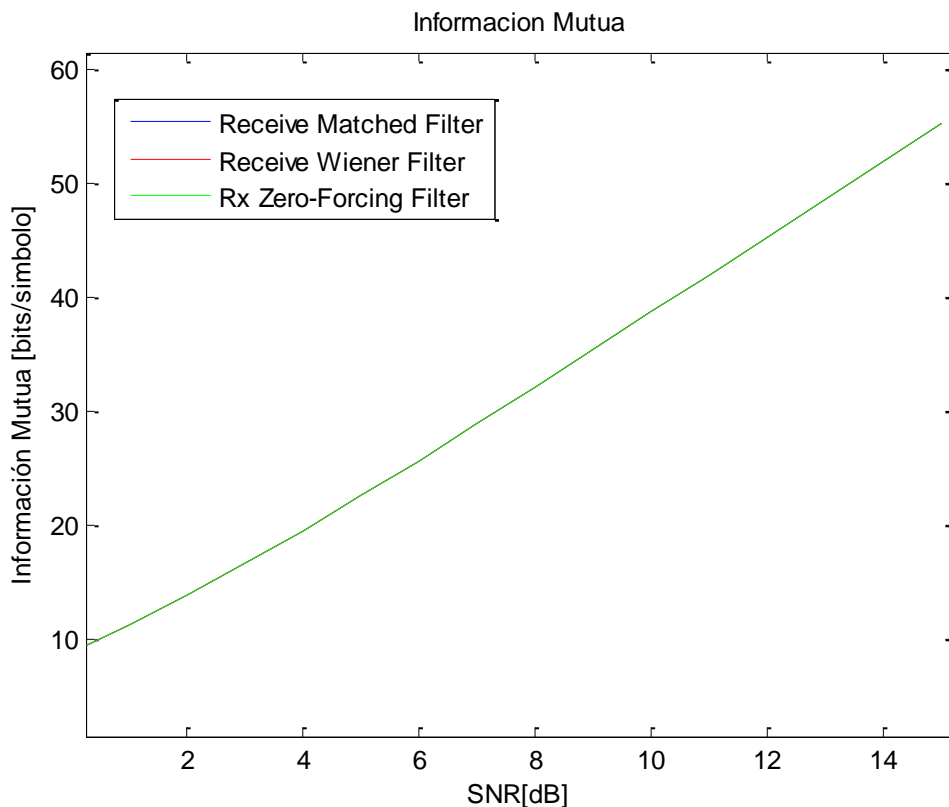


Ilustración 59 - Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar decodificación (QPSK, $M>K$)

A la vista de la figura anterior podemos decir que, para codificación QPSK, no sólo el comportamiento de los métodos se ajusta al visto para codificación BPSK sino que además presenta mejores prestaciones. Este hecho se debe a que esta codificación envía dos bits por cada símbolo, por lo que la información que se envía es mayor que la transmitida al usar BPSK, pues esta codificación sólo envía un bit por símbolo.

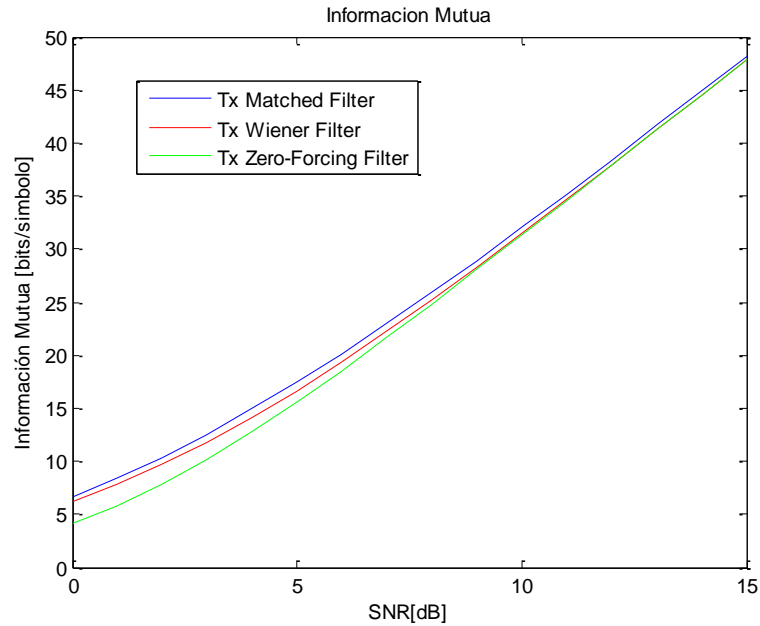


Ilustración 60 - Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar precodificación (QPSK, $M > K$)

Comprobamos en la gráfica que el comportamiento de los métodos en precodificación es equivalente a lo que ocurría para el caso de la codificación BPSK, es decir, las prestaciones de los tres filtros convergen con el aumento de la SNR y tienen valores cercanos a los obtenidos con BPSK, aunque algo mayores al igual que en el caso de utilizar decodificación. Sin, embargo, la diferencia entre las prestaciones sí que es distinta con la del análisis anterior (para BPSK, las prestaciones de los métodos de decodificadores y precodificadores convergían mientras que para QPSK la diferencia de prestaciones es clara):

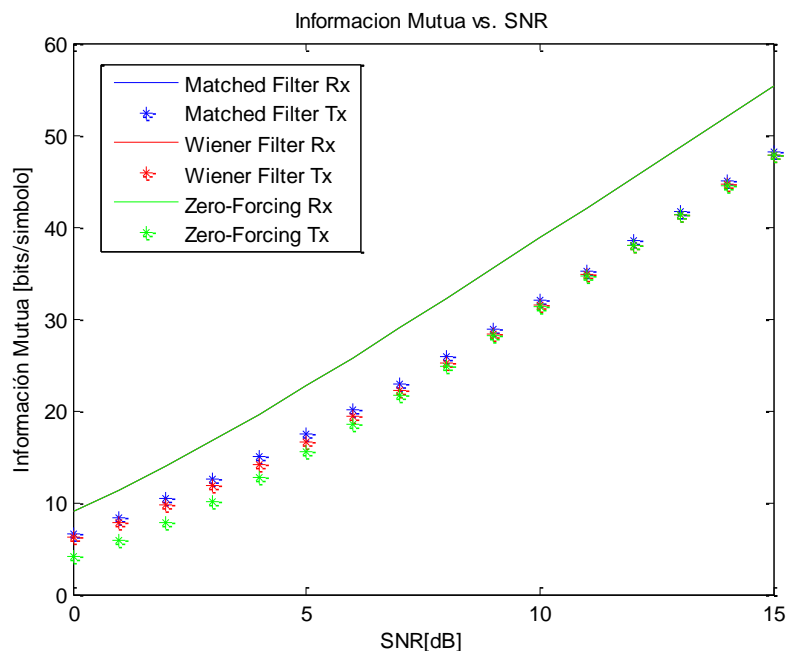


Ilustración 61 - Inf. Mutua en función de la SNR para ambos casos (QPSK, $M > K$)

2.2. Mayor número de usuarios que de antenas ($M=5$, $K=8$)

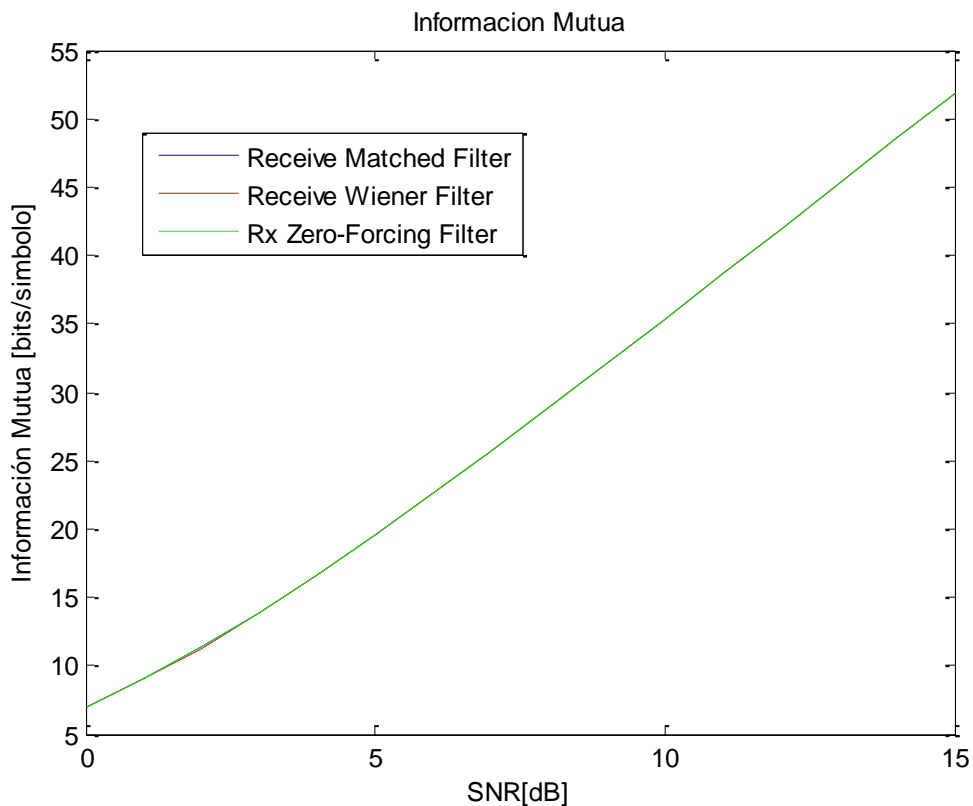


Ilustración 62 - Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar decodificación (QPSK, $M < K$)

Vemos por la gráfica que, al igual que para BPSK, las prestaciones de los tres métodos se comportan de la misma forma aunque tienen valores inferiores que en el caso en que el número de antenas es mayor que el de usuarios.

Del mismo modo, los precodificadores deberían presentar prestaciones muy cercanas a las obtenidas en caso de usar decodificación salvo en el caso de utilizar el método de forzado a cero ya que éste presentaba prestaciones menores que los otros dos filtros.

Si analizamos la siguiente gráfica, podemos ver que efectivamente el comportamiento de los métodos es el esperado y asemeja al presentado por las mismas configuraciones para el caso en que estemos transmitiendo en codificación BPSK.

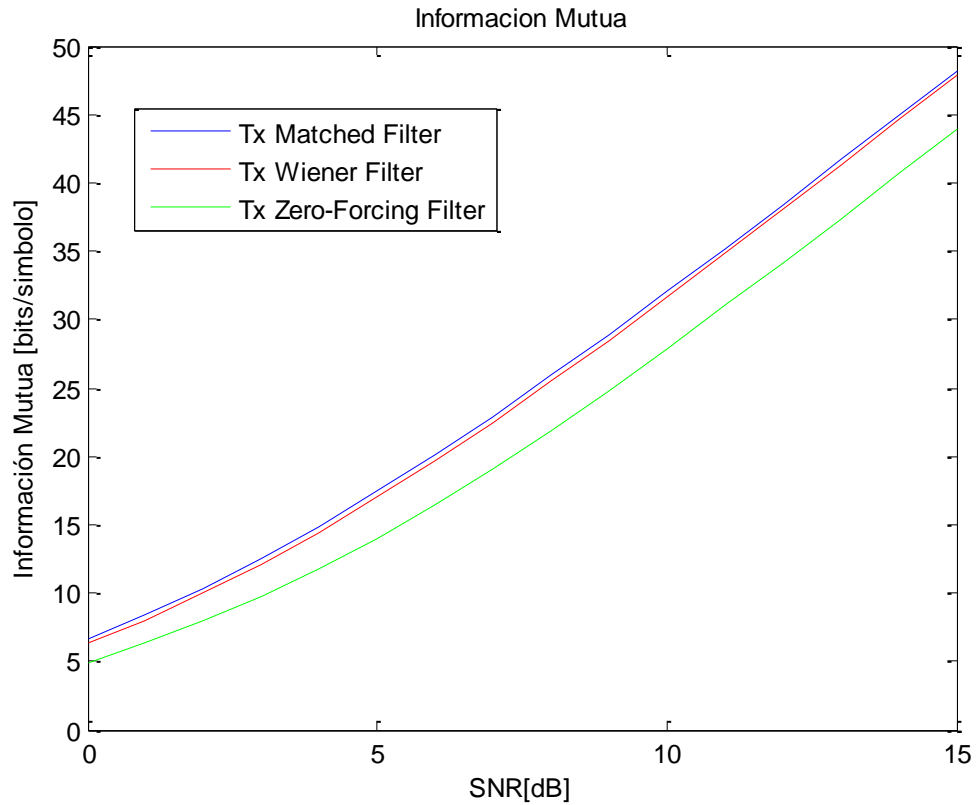


Ilustración 63 - Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar precodificación (QPSK, $M < K$)

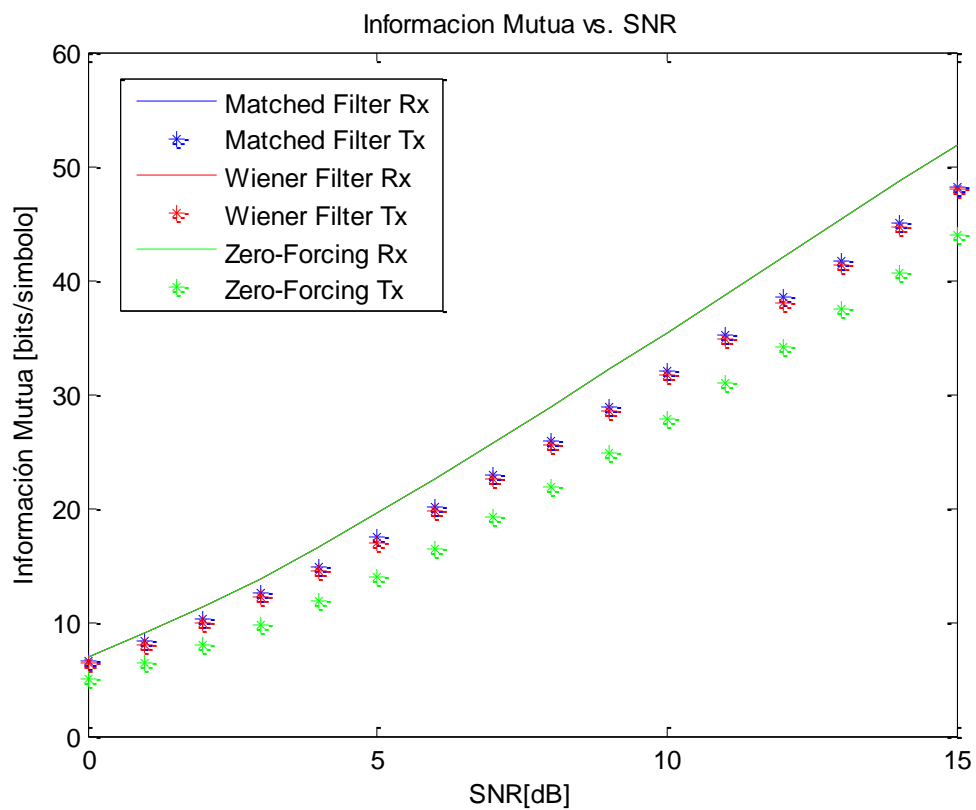


Ilustración 64 - Inf. Mutua en función de la SNR para ambos casos (QPSK, $M < K$)

2.3. Mismo número de antenas que de usuarios ($M=5$ y 8 , $K=5$ y 8)

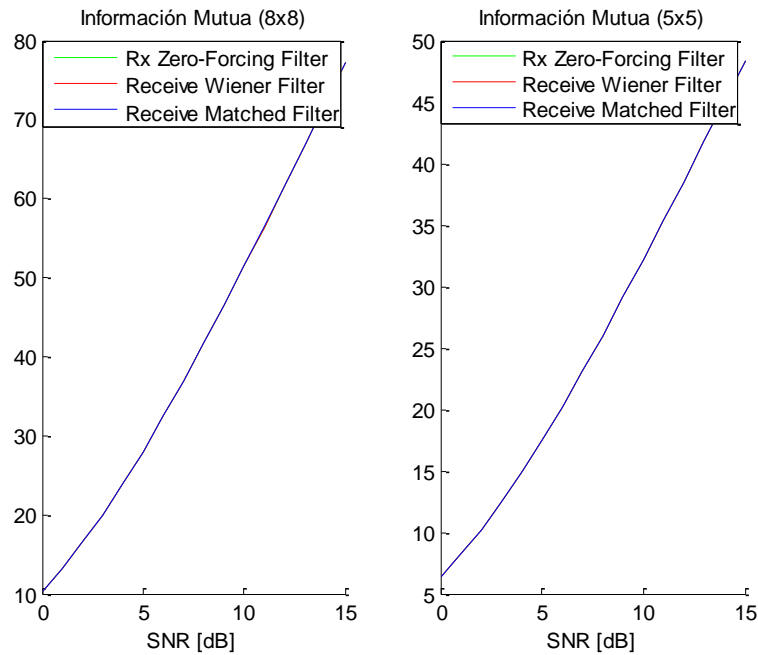


Ilustración 65 - Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar decodificación (QPSK, $M=K$)

Al igual que ocurriera con la constelación BPSK, en la configuración que estamos estudiando las prestaciones de información mutua se disparan en la configuración 8x8 y se mantienen semejantes a las obtenidas en los casos en que el número de antenas es mayor que el de usuarios y viceversa. El comportamiento de los decodificadores también se ajusta a lo que hemos visto en casos anteriores.

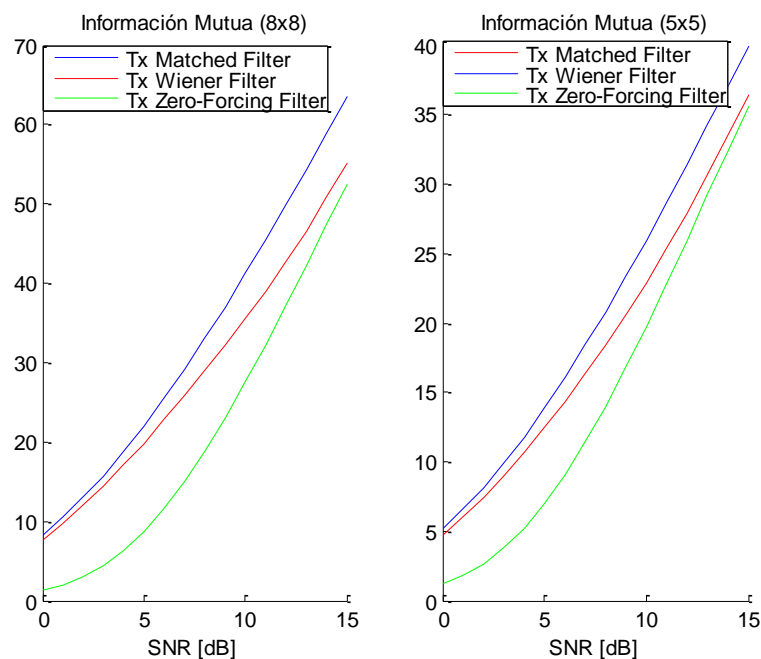


Ilustración 66 - Inf. Mutua en función de la SNR en caso de usar precodificación (QPSK, $M=K$)

Como en el caso de utilizar decodificación, los resultados que obtenemos en QPSK son muy parejos a los que conseguimos para BPSK y puede verse la diferencia en prestaciones entre las configuraciones 8x8 y 5x5.

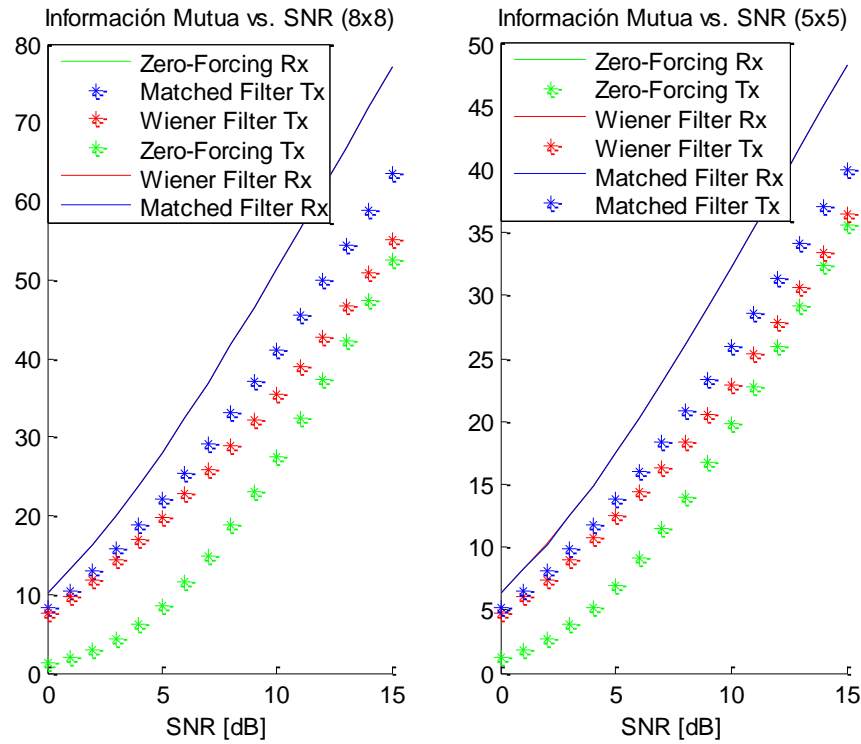


Ilustración 67 - Inf. Mutua en función de la SNR para ambos casos (QPSK, $M=K$)

Al igual que para la probabilidad de error, a continuación vamos a analizar la evolución de las prestaciones sobre información mutua con el número de antenas y para un número de usuarios fijo.

2.4. Estudio de la influencia del número de antenas en las prestaciones

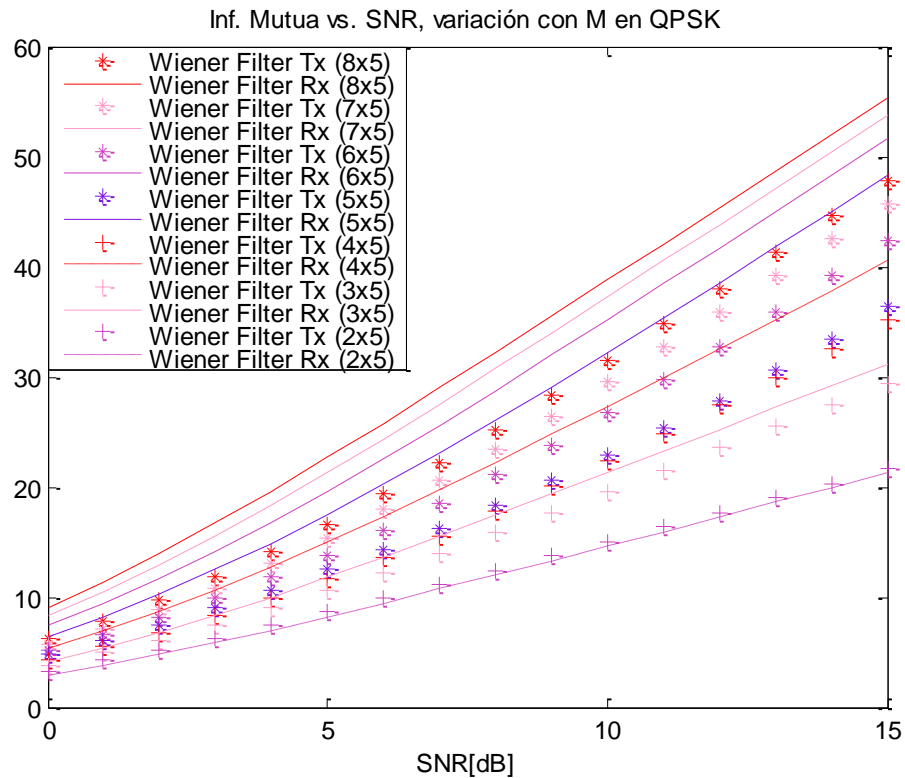


Ilustración 68 - Evolución de la Inf. Mutua con el número de antenas (Wiener, QPSK)

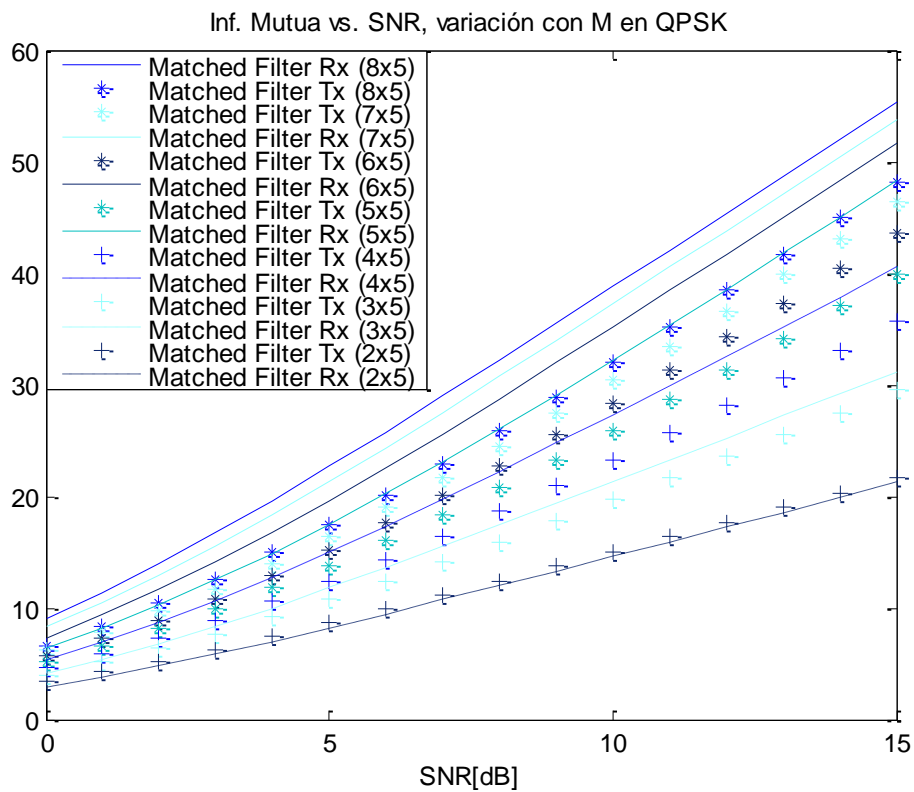


Ilustración 69 - Evolución de la Inf. Mutua con el número de antenas (Matched Filter, QPSK)

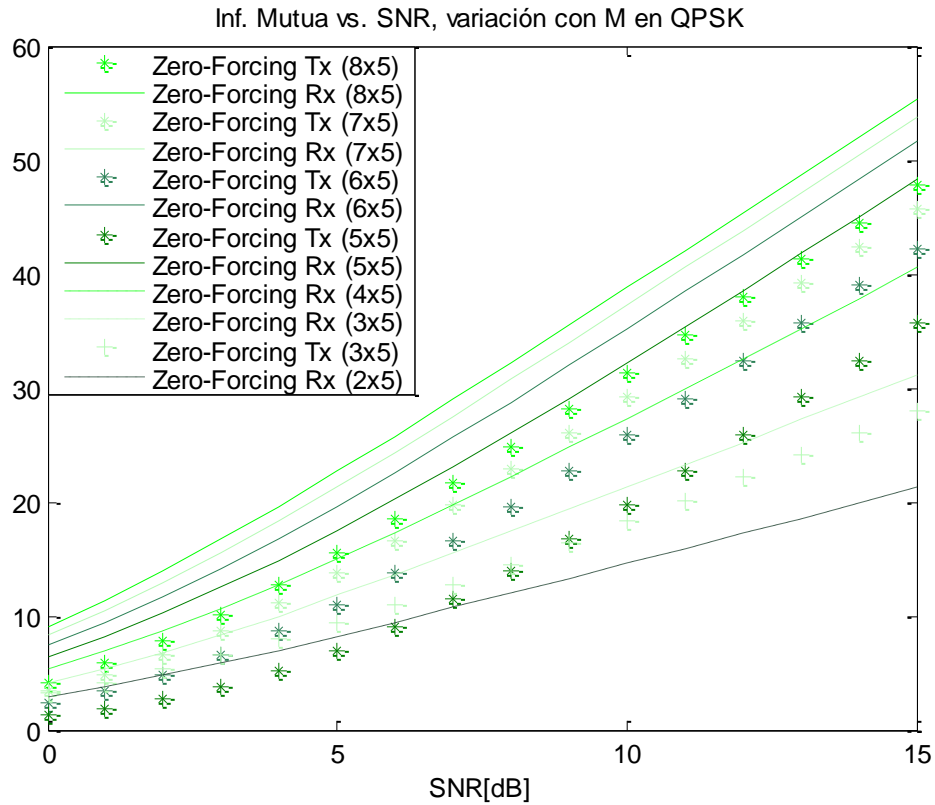


Ilustración 70 - Evolución de la Inf. Mutua con el número de antenas (ZF, QPSK)

En el caso del uso de codificación QPSK, el comportamiento de los métodos es similar al que presentaban con BPSK aunque presentan unas prestaciones mayores que las ofrecidas por la otra codificación. La tasa de crecimiento con el aumento de las antenas de cada uno de los métodos es similar entre ellos y al que tenían los mismos métodos con codificación BPSK. Sin embargo, ya no se presenta el mismo fenómeno por el que las prestaciones para configuraciones con número de antenas mayor que el de usuarios eran mejores usando decodificación mientras que para aquellas en que es menor las prestaciones serán mejores si se usa precodificación, sino que los valores obtenidos con la decodificación son mayores para todos los métodos y valores de M.

Relación señal a interferencia

A continuación vamos a presentar las gráficas de la relación señal a interferencia del sistema en caso de utilizar precodificación (gráficas representadas en rojo y con notación W^{tx}) o usar decodificación (gráficas representadas en azul y con notación W^{rx}). Para analizar si la hipótesis que presentaba Viswanath en [11], vamos a estudiar los resultados del sentido directo (W^{tx} usado en transmisión y W^{rx} en recepción, representados gráficamente con línea sólida) y del sentido inverso (W^{tx} usado en recepción y W^{rx} en transmisión, representados gráficamente con asteriscos).

1. BPSK

1.1. Mayor número de antenas que de usuarios

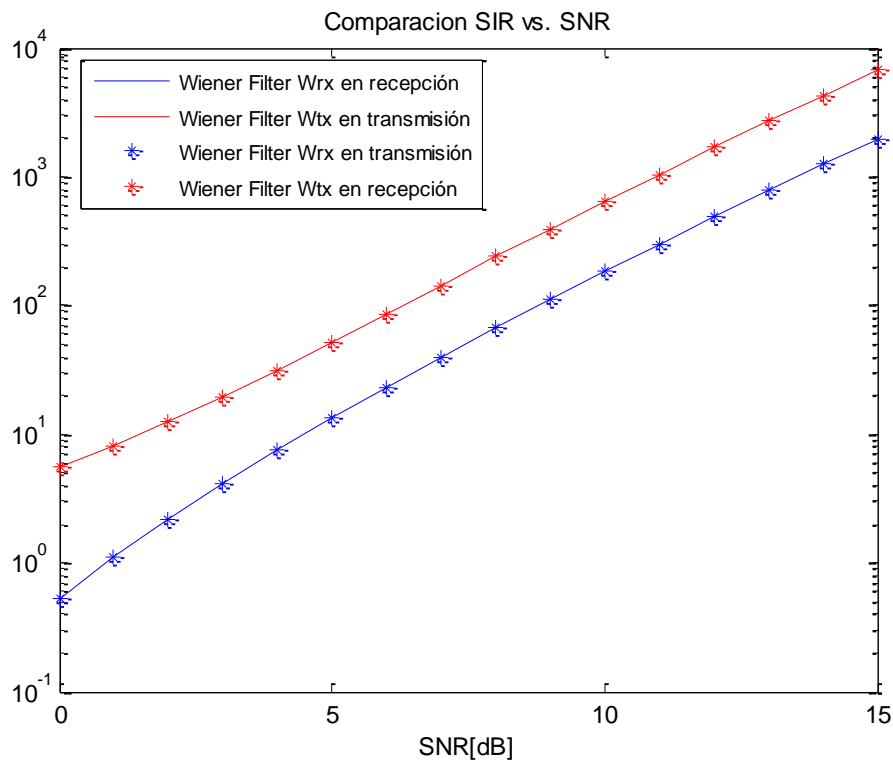


Ilustración 71 - Relación señal a interferencia para BPSK (Wiener, $M > K$)

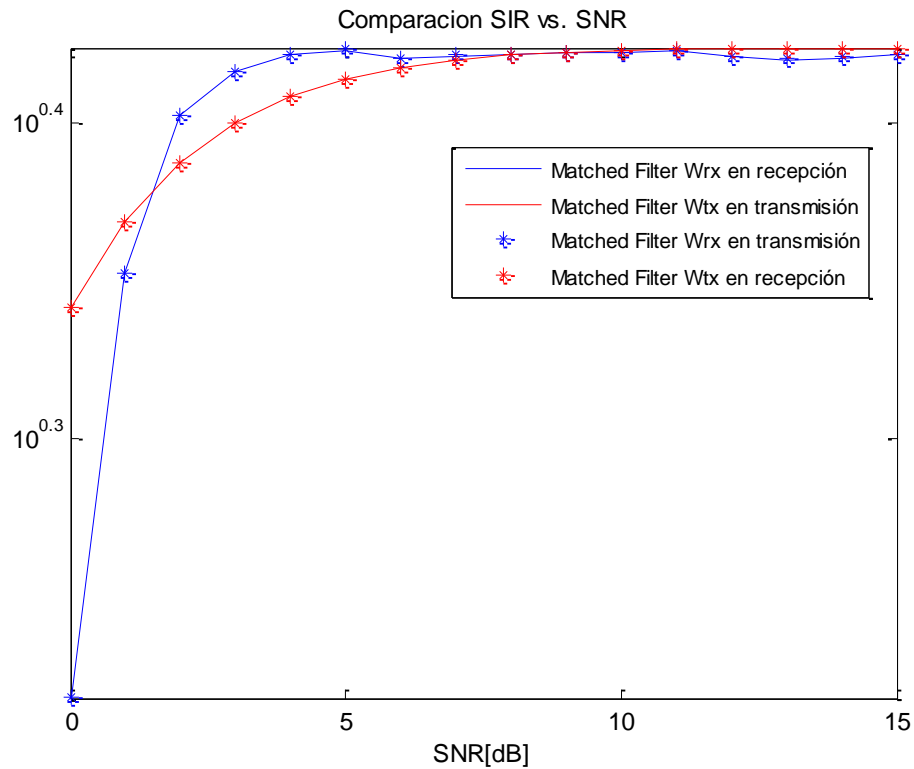


Ilustración 72 - Relación señal a interferencia para BPSK (Matched Filter, $M > K$)

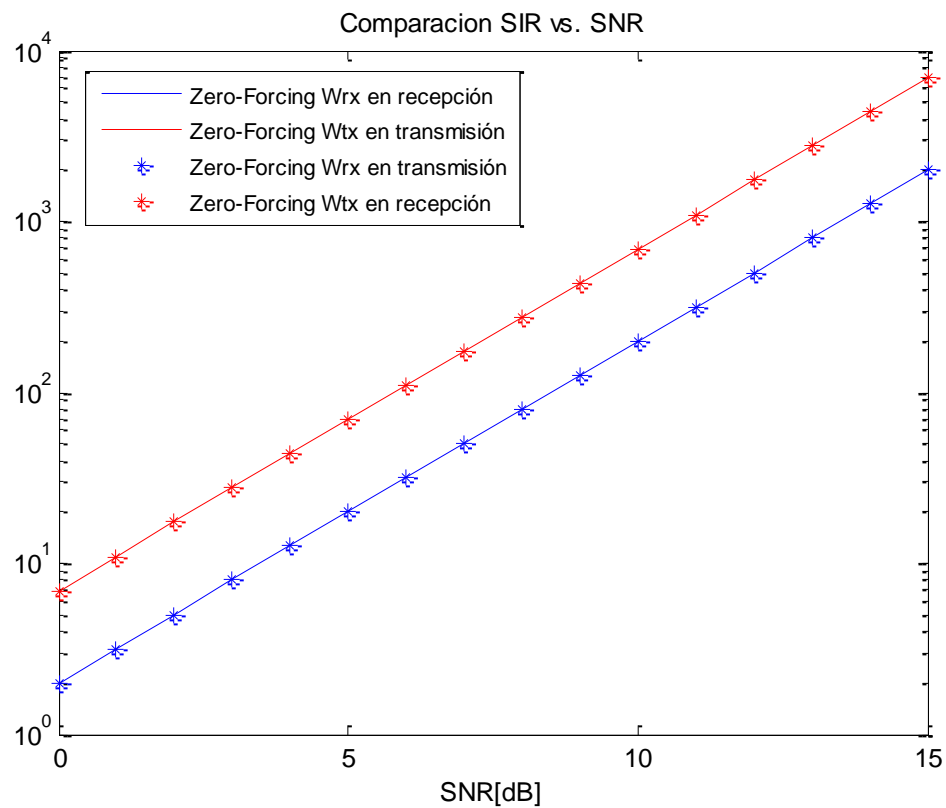


Ilustración 73 - Relación señal a interferencia para BPSK (ZF, $M > K$)

Comprobamos que como se postulaba en [11], al menos en aquellas configuraciones en las que el número de antenas es mayor que el de usuarios, la relación señal a interferencia es equivalente para ambos sentidos de la comunicación siempre que la técnica utilizada (ya sea precodificación o decodificación) sea la misma.

Vemos también que la SIR es mayor en caso de usar precodificación que si se usa decodificación y que las gráficas de los métodos de Wiener y forzado a cero crecen de forma aproximada a la lineal con la relación señal a ruido mientras que el método del filtro adaptado alcanza su límite para una SNR igual a 6-7 dB. Si comprobamos las gráficas de la probabilidad de error (*Ilustración 17*, *Ilustración 18* e *Ilustración 19*) el comportamiento de los métodos en lo que a BER se refiere queda claramente reflejado por la relación señal a interferencia ya que vemos que el método MF alcanza su límite para una relación señal a ruido de 6-7 dB, los métodos de Wiener y ZF aumentan su rendimiento para todo valor de SNR y con una progresión y valores similares (al igual que en las gráficas de la relación señal a interferencia en función de la SNR).

1.2. Mayor número de usuarios que de antenas

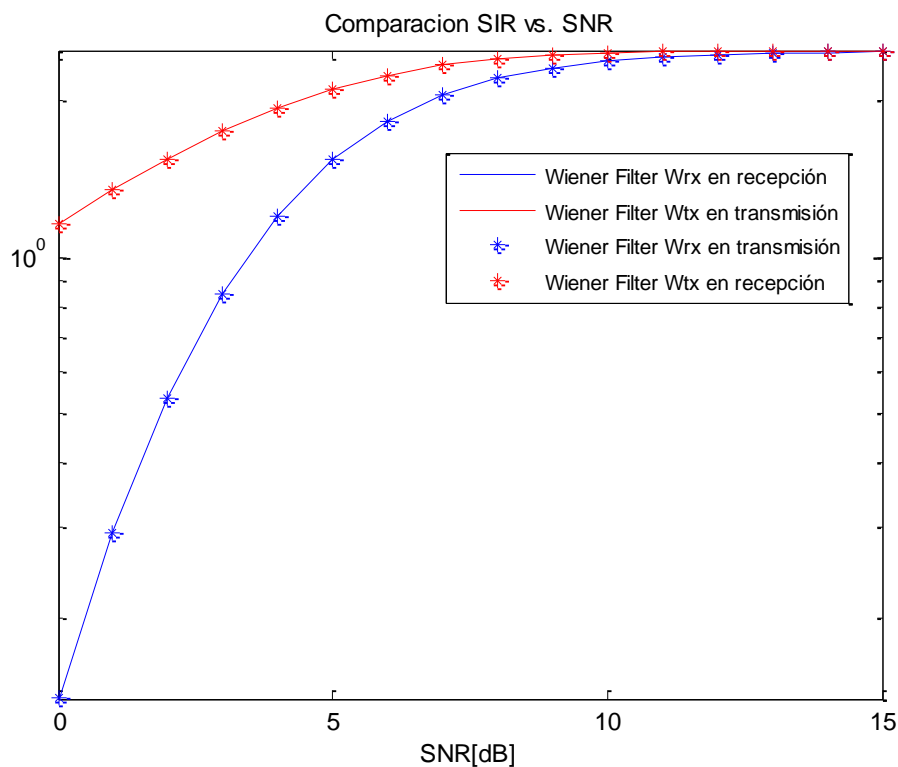


Ilustración 74 - Relación señal a interferencia para BPSK (Wiener, $M < K$)

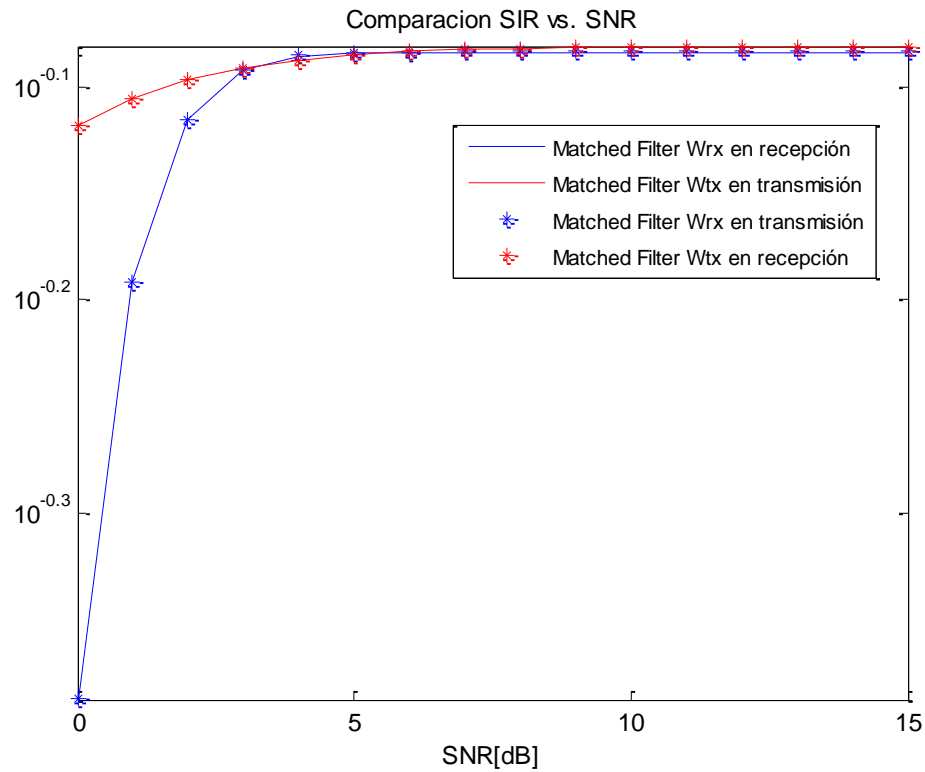


Ilustración 75 - Relación señal a interferencia para BPSK (Matched Filter, $M < K$)

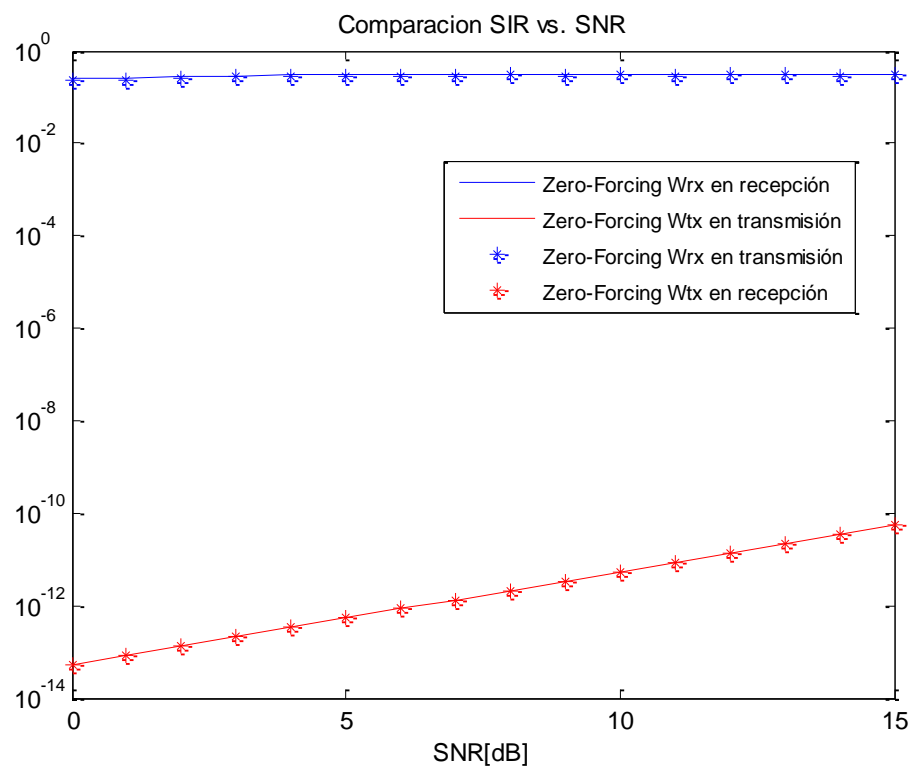


Ilustración 76 - Relación señal a interferencia para BPSK (ZF, $M < K$)

Al igual que en la configuración anterior, $M > K$, la hipótesis de Viswanath y Tse se cumple. Sin embargo, es el único punto común con los resultados para la configuración anterior ya que en este caso los valores de la SIR son claramente inferiores y todos los métodos alcanzan su asíntota, los resultados para precodificación y método de forzado a cero no parecen limitado pero esto se debe a que son realmente subóptimos y una variación pequeña parece mucho mayor para estos valores.

Podemos ver que las gráficas de probabilidad de error y relación señal a interferencia tienen la misma correlación que en el caso de la configuración con mayor número de antenas que de usuarios, ya que la saturación de los valores de la relación señal a ruido se corresponden con la limitación del rendimiento en las gráficas de la probabilidad de error y los valores de relación señal a ruido donde se producen son aproximadamente iguales. Además, si nos centramos en el método de forzado a cero, vemos que el rendimiento de relación señal a interferencia en función de la SNR cae drásticamente al igual que pasa para la probabilidad de error. Otra consecuencia del mal condicionamiento, es que para ZF, y sólo para este método, el rendimiento de la precodificación es inferior al que se obtiene con la decodificación, puesto que se ve más afectada por la pérdida de prestaciones que conlleva este efecto.

Aunque parezca contradictorio que según aumente la relación señal a ruido los métodos se saturen y se vean limitados por interferencia, este hecho puede explicarse ya que al aumentar la potencia de señal transmitida en función del ruido, también aumenta la potencia transmitida para el resto de usuarios haciendo que el sistema pase a estar limitado por interferencia del resto de usuarios en vez de por las variaciones que les provoca el ruido del canal.

1.3. Mismo número de antenas que de usuarios

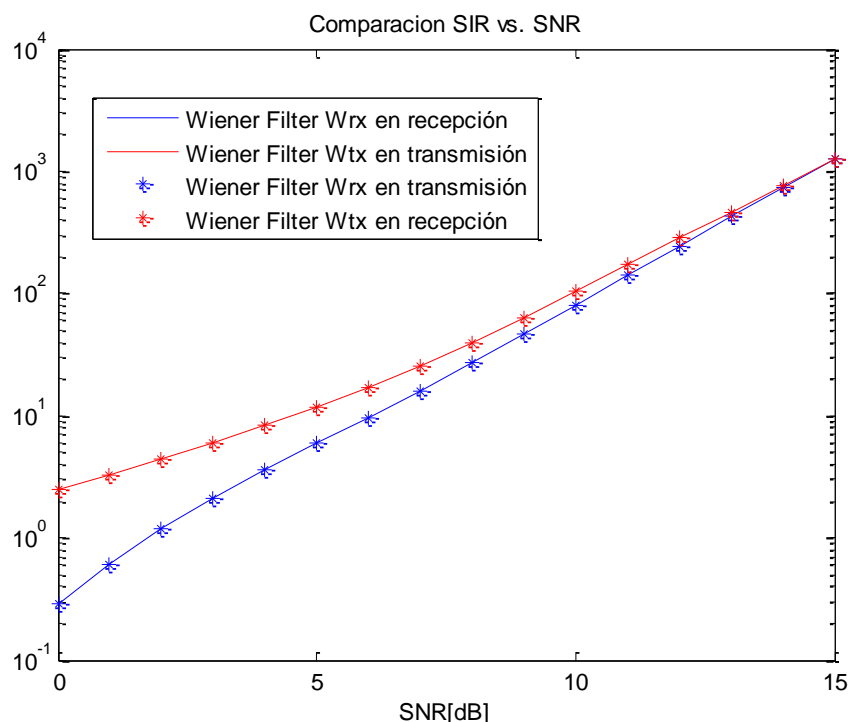


Ilustración 77 - Relación señal a interferencia para BPSK (Wiener, $M=K=8$)

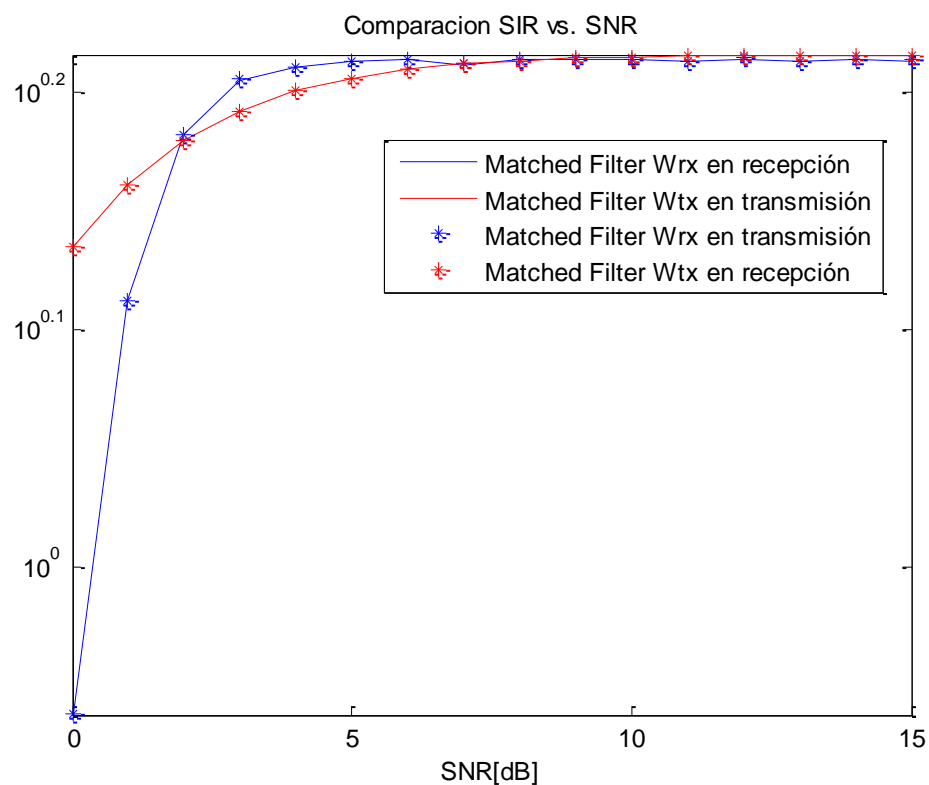


Ilustración 78 - Relación señal a interferencia para BPSK (Matched Filter, $M=K=8$)

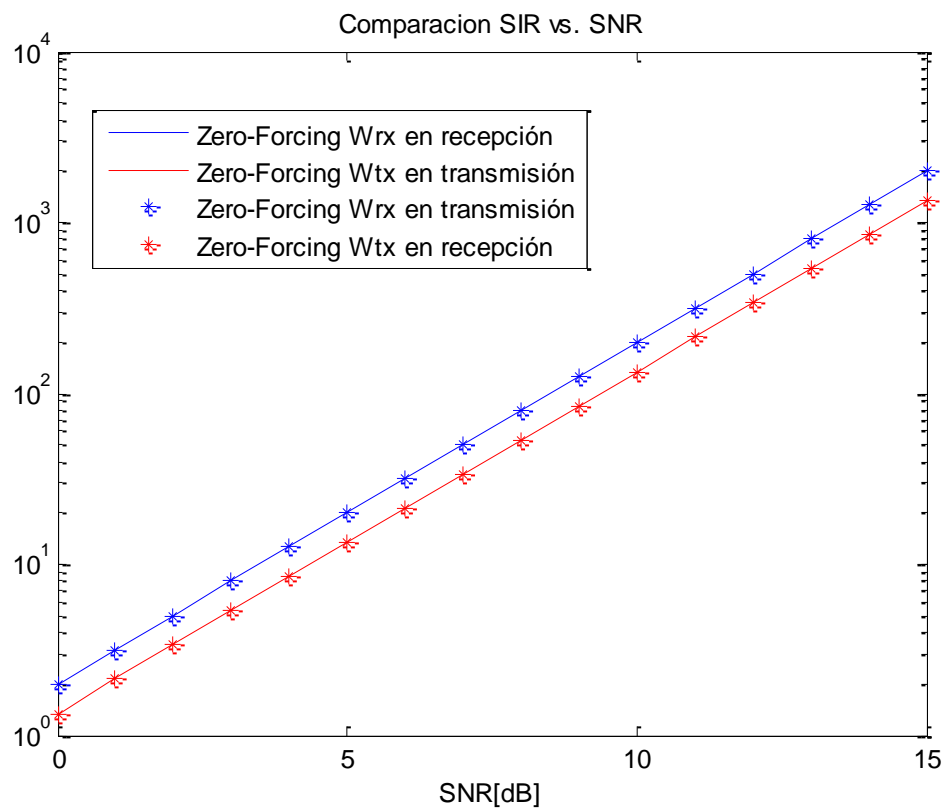


Ilustración 79 - Relación señal a interferencia para BPSK (ZF, $M=K=8$)



Al revisar las gráficas podemos ver que se siguen cumpliendo la correlación con la probabilidad de error y la equivalencia de los resultados para ambos sentidos de transmisión. Podemos ver que la evolución de las gráficas es similar a la que tenemos en el caso de M mayor que K pero con valores menores al igual que las gráficas de probabilidad de error.

Tras analizar todos los casos de configuraciones podemos concluir que la evolución de la relación señal a interferencia depende de la diferencia entre el número de antenas y el de usuarios del sistema, al igual que la probabilidad de error. Podemos decir esto porque, aunque el número de antenas aumente, si el número de usuarios también lo hace, la influencia del resto de usuarios y su correspondiente interferencia también va a ser mucho mayor. De esta forma, la única manera de aumentar la SIR sería ampliar el número de antenas para que de este modo la diversidad espacial paliara la interferencia.

Para corroborar esta hipótesis vamos a representar la evolución de este parámetro con el número de antenas para un número fijo de usuarios al igual que hicimos para las otras medidas de rendimiento.

1.4. Estudio de la influencia del número de antenas en las prestaciones

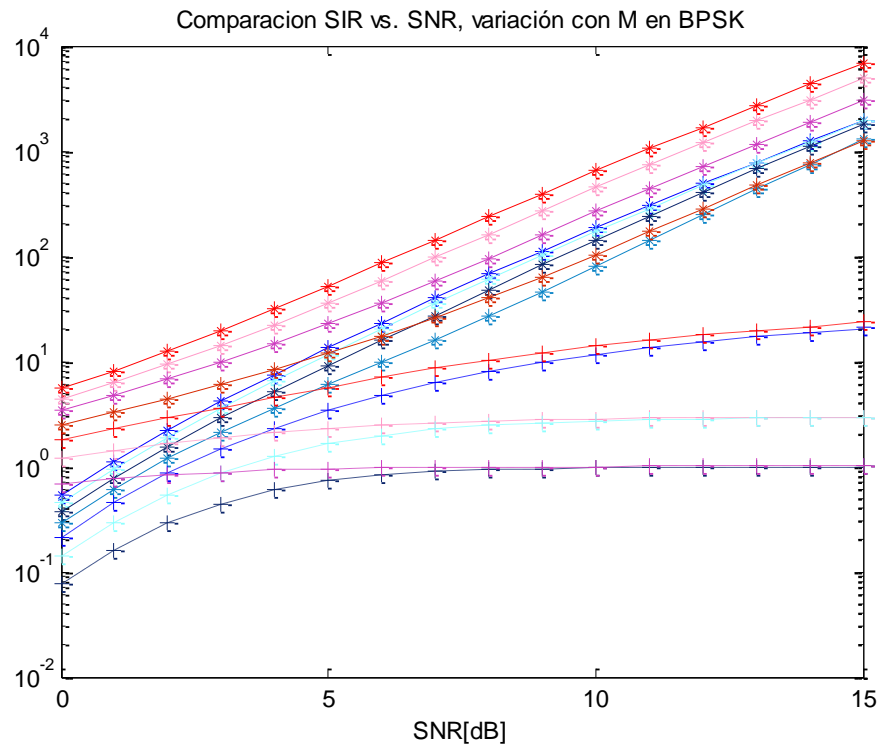


Ilustración 80 - Evolución de la SIR con el número de antenas (Wiener, BPSK)

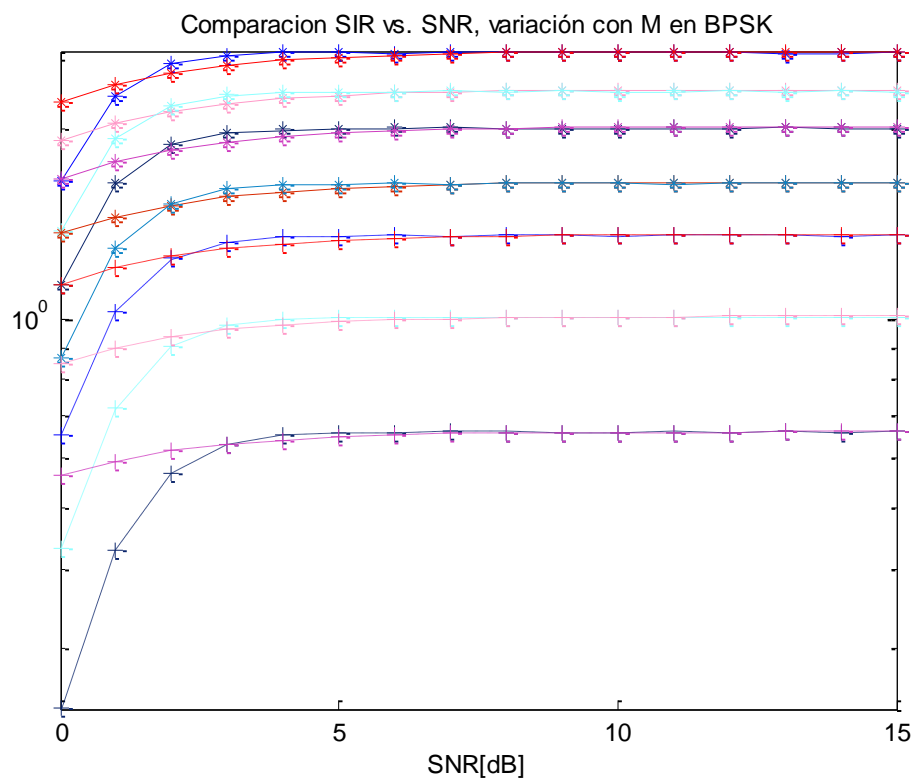


Ilustración 81 - Evolución de la SIR con el número de antenas (Matched Filter, BPSK)

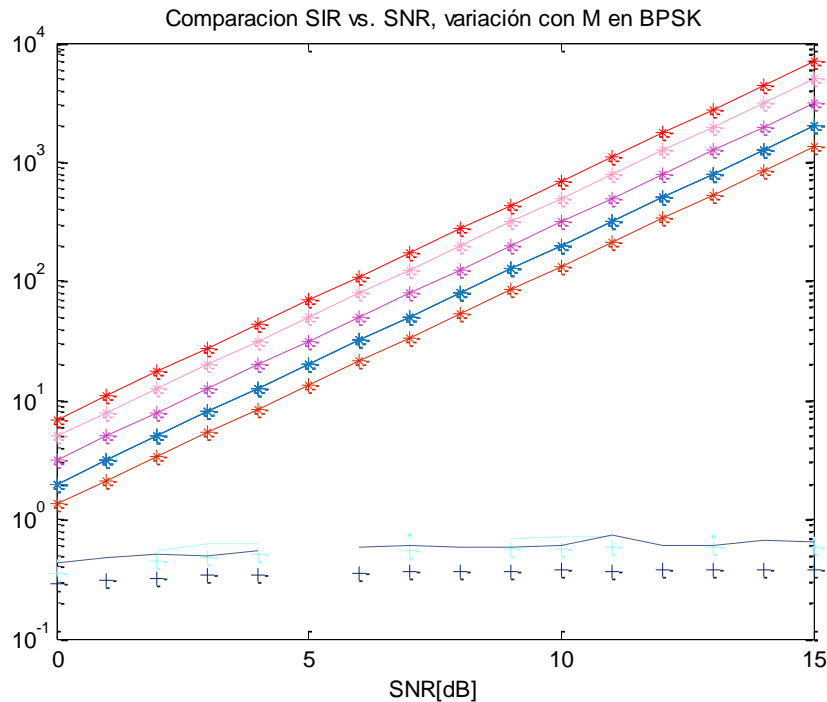


Ilustración 82 - Evolución de la SIR con el número de antenas (ZF, BPSK)

En estas gráficas mantenemos la representación utilizada para las gráficas individuales de cada una de las configuraciones, es decir, en las tonalidades rojas representamos los valores que se obtienen en las distintas configuraciones en caso de usar precodificación en el sistema, mientras que los valores que se obtienen al utilizar decodificación se representan en tonalidades azules. Las líneas representan el sentido normal de la transmisión (W^{tx} en transmisión y W^{rx} en recepción) mientras que los símbolos se asocian a la formulación transpuesta (W^{tx} en recepción y W^{rx} en transmisión).

Vemos que, como comentábamos en los análisis anteriores, podemos diferenciar aquellas configuraciones en las que el número de antenas es mayor o menor que el de usuarios ya que para éstas últimas el sistema está limitado por interferencia y las gráficas se saturan (salvo para el método de filtro adaptado ya que para éste todas las configuraciones se encuentran limitadas por la interferencia interusuario). El extremo de esta hipótesis lo presenta, como ya lo hiciera para la probabilidad de error, el método de forzado a cero ya que, para las configuraciones en las que se encuentra bien condicionado, presenta un rendimiento cercano al proporcionado por el precodificador de Wiener (el que presenta mejor rendimiento en todo caso), mientras que sus prestaciones se resienten drásticamente con la pérdida de condicionamiento (para las configuraciones con menor número de antenas que de usuarios en el sistema).

Como era de esperar, la variación de la diferencia M-K influye directamente en las prestaciones de la relación señal a interferencia comprobando que según disminuye este factor, decrecen a ritmo más o menos constante las prestaciones de las configuraciones, con las excepciones de los saltos entre configuraciones con $M > K$ y $M < K$ (la pérdida de prestaciones en este salto es algo mayor debido a que el sistema pasa a estar limitado por interferencia) y del rendimiento de las configuraciones con decodificador ZF y mayor número de antenas que de usuarios, ya que obtienen los mismo valores para todo valor de relación señal a ruido.

2. QPSK

2.1. Mayor número de antenas que de usuarios ($M=8$ y $K=5$)

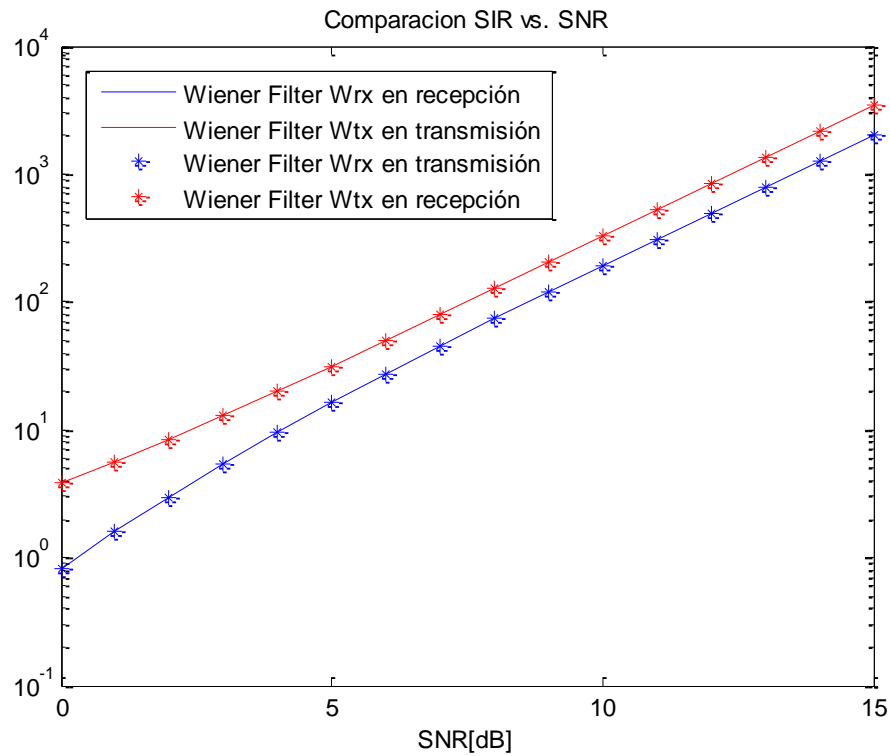


Ilustración 83 - Relación señal a interferencia para QPSK (Wiener, $M > K$)

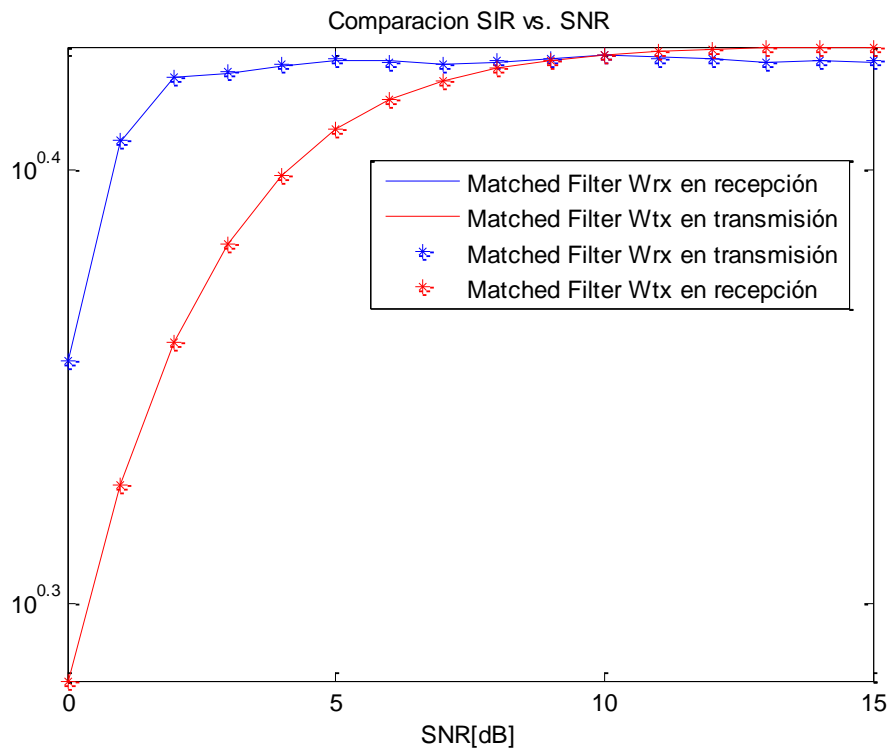


Ilustración 84 - Relación señal a interferencia para QPSK (Matched Filter, $M > K$)

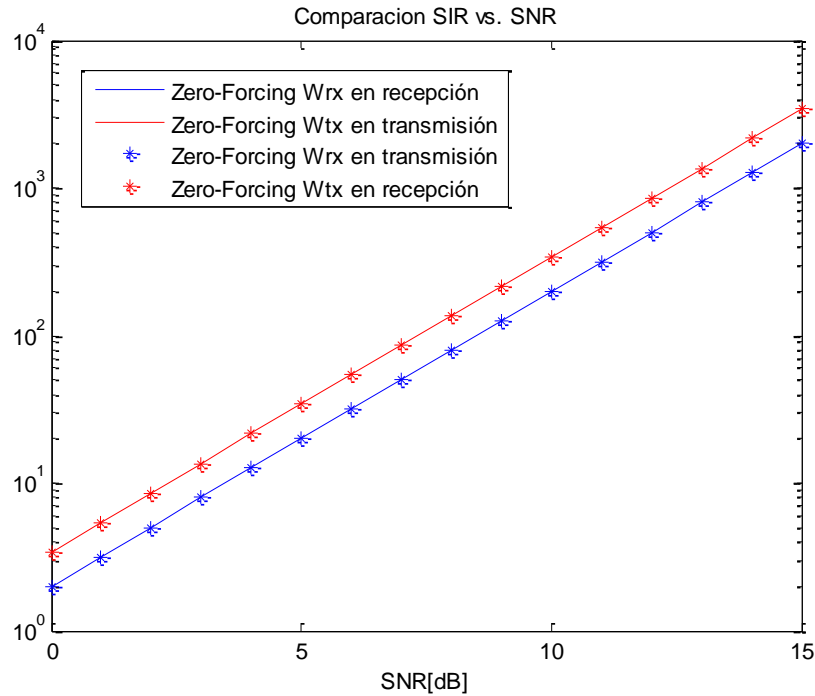


Ilustración 85 - Relación señal a interferencia para QPSK (ZF, $M > K$)

Si comparamos las gráficas de SIR para QPSK y BPSK podemos ver que el patrón de evolución para todas es equivalente y que los valores obtenidos son similares para ambas codificaciones, al igual que pasaba para las probabilidades de error.

2.2. Mayor número de usuarios que de antenas ($M=5$ y $K=8$)

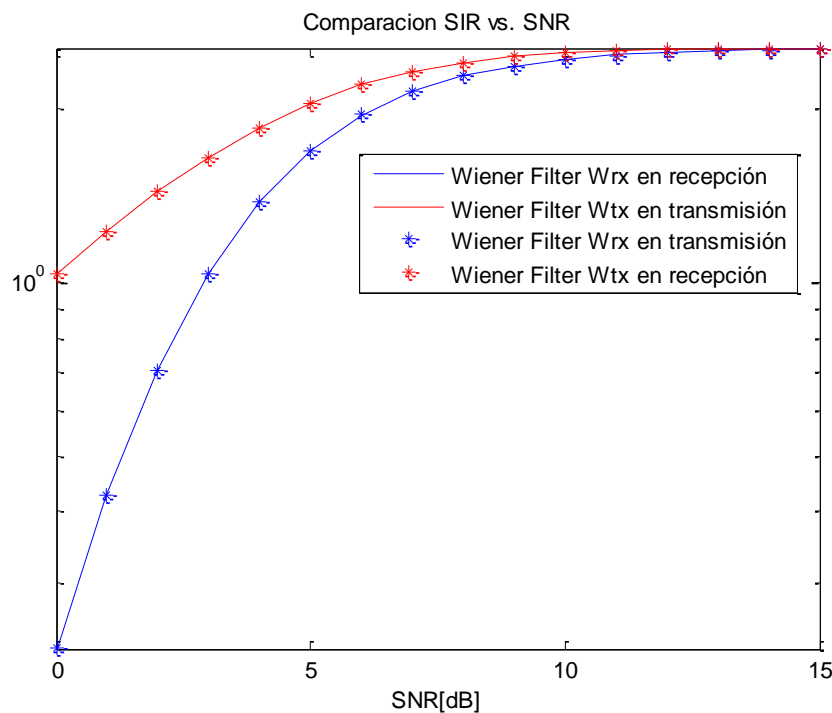


Ilustración 86 - Relación señal a interferencia para QPSK (Wiener, $M < K$)

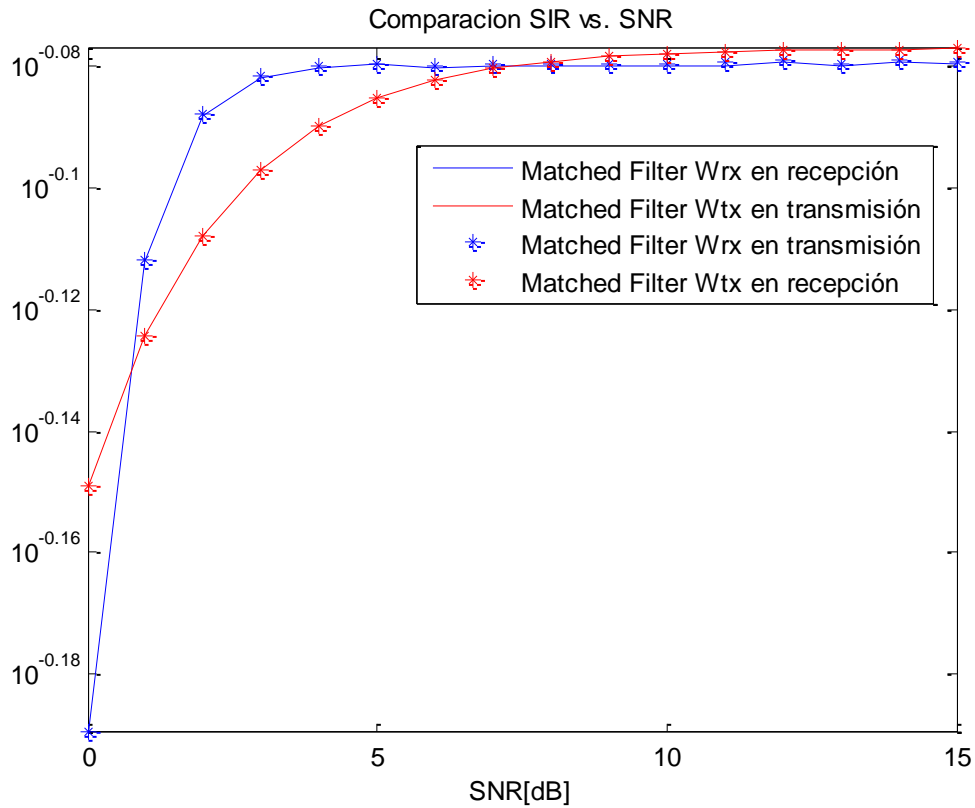


Ilustración 87 - Relación señal a interferencia para QPSK (Matched Filter, $M < K$)

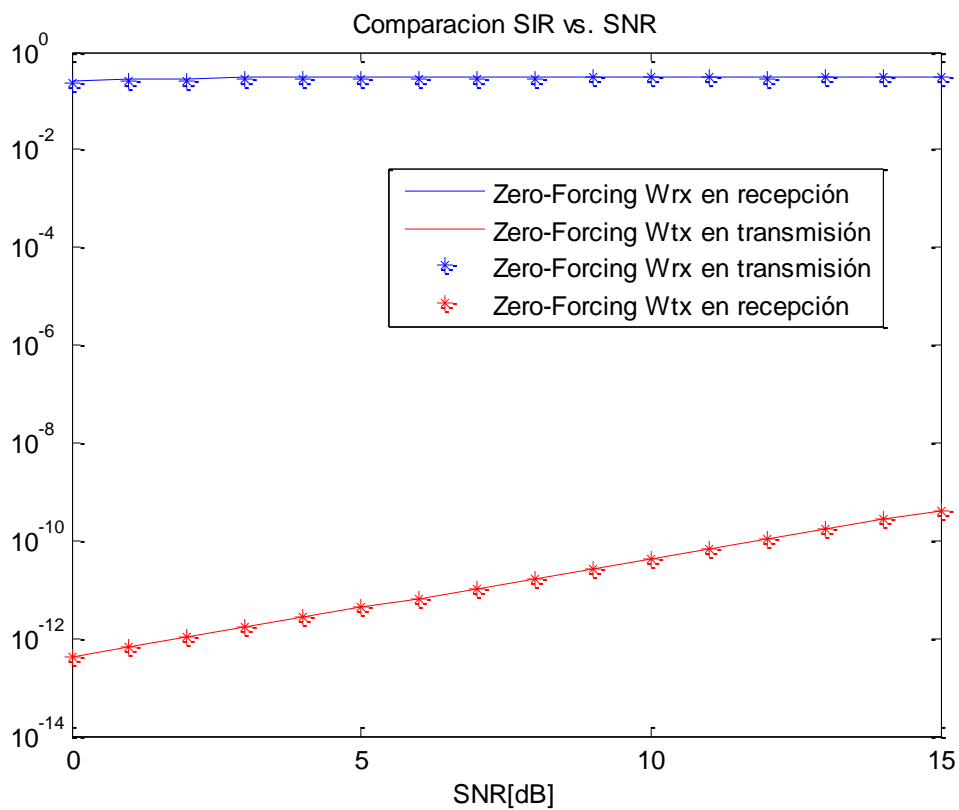


Ilustración 88 - Relación señal a interferencia para QPSK (ZF, $M < K$)

Vemos que al igual que pasara para BPSK, al pasar a una configuración de sistema con mayor número de usuarios que de antenas, los distintos métodos sufren una clara caída de prestaciones, se ven más limitados por las interferencias. También, el método ZF pasa de no estar limitado por interferencia en la configuración $M > K$ a estar limitado independientemente de la relación señal a ruido con unos valores muy inferiores a los presentados en la configuración anterior.

2.3. Mismo número de antenas que de usuarios ($M=5$ y 8 , $K=5$ y 8)

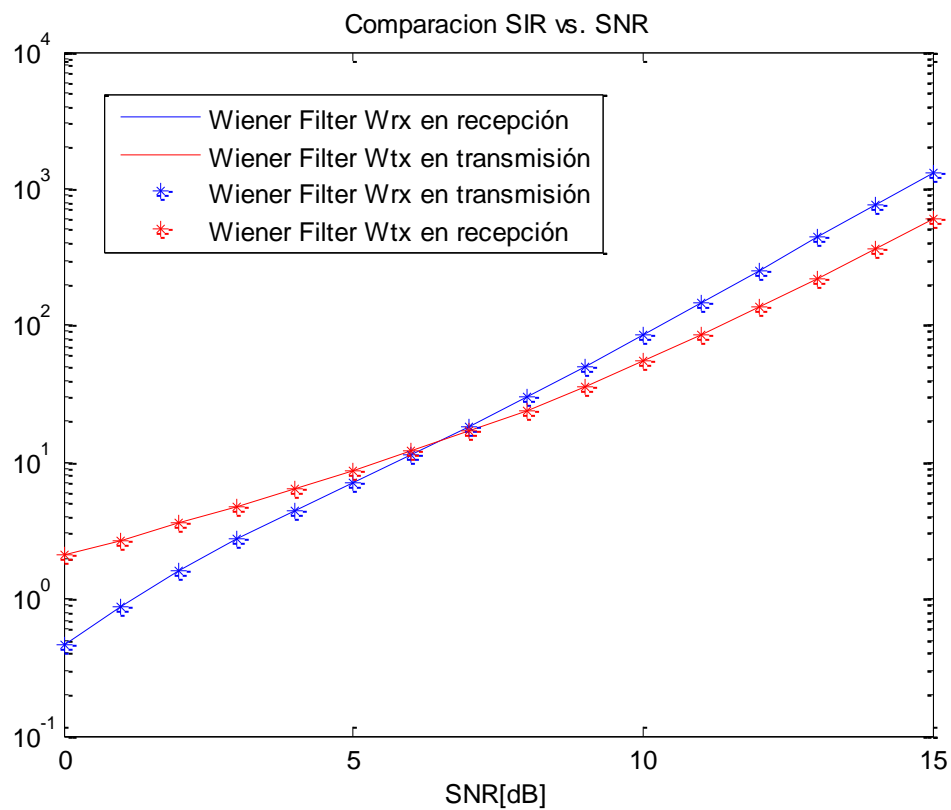


Ilustración 89 - Relación señal a interferencia para QPSK (Wiener, $M=K=8$)

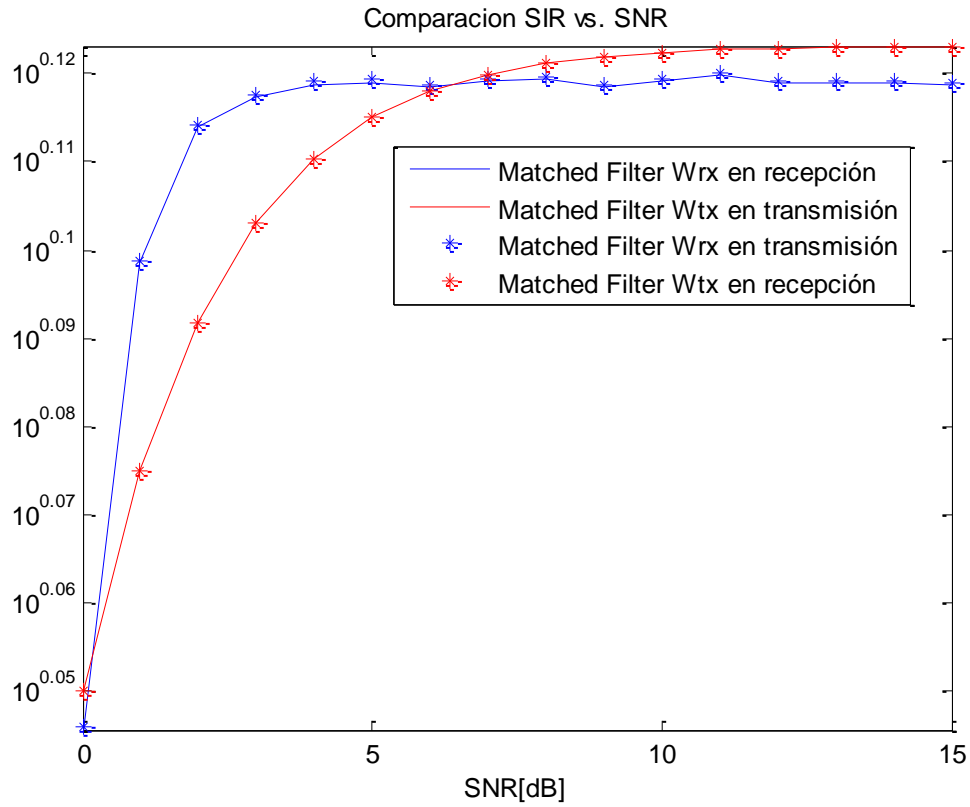


Ilustración 90 - Relación señal a interferencia para QPSK (Matched Filter, $M=K=8$)

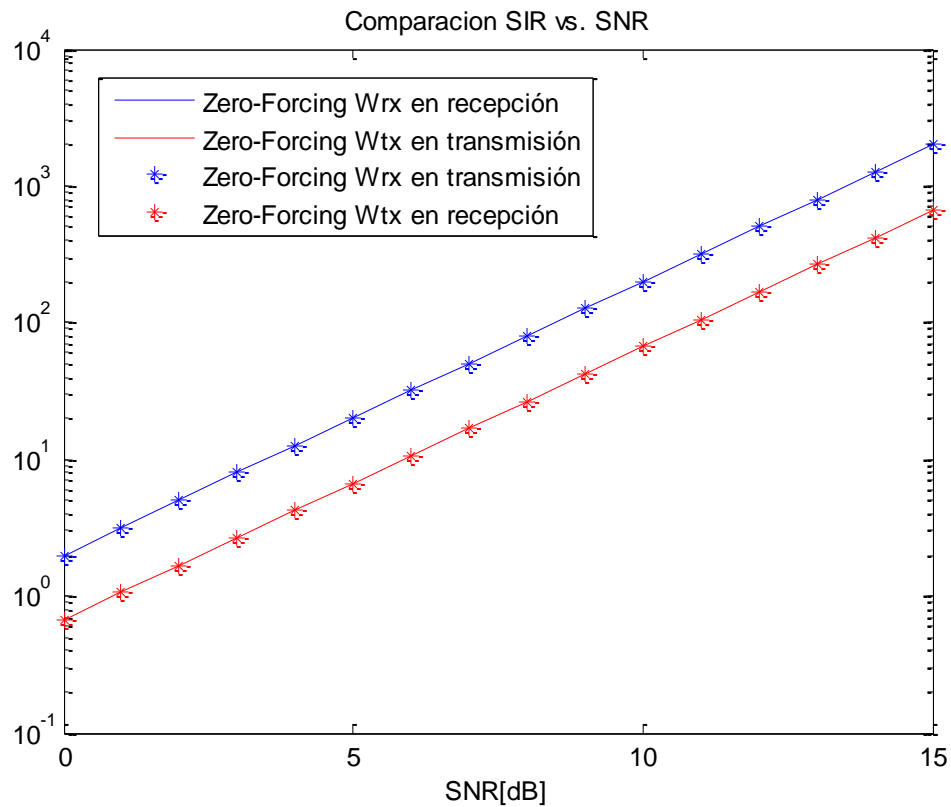


Ilustración 91 - Relación señal a interferencia para QPSK (ZF, $M=K=8$)

Al igual que para las dos configuraciones anteriores, $M > K$ y $M < K$, el comportamiento con respecto a las interferencias de los métodos en el caso de usar codificación QPSK es equivalente al que hemos visto para BPSK. De esta forma, las prestaciones de los métodos mejoran y parecen recobrar la evolución que presentan para la configuración con mayor número de antenas que de usuarios aunque con peores valores ya que esta configuración del sistema está más limitada por la interferencia pues no hay posibilidad de usar antenas para diversidad espacial con lo que la influencia del resto de usuarios en la componente que recibimos de nuestro usuario no puede verse paliada.

2.4. Estudio de la influencia del número de antenas en las prestaciones

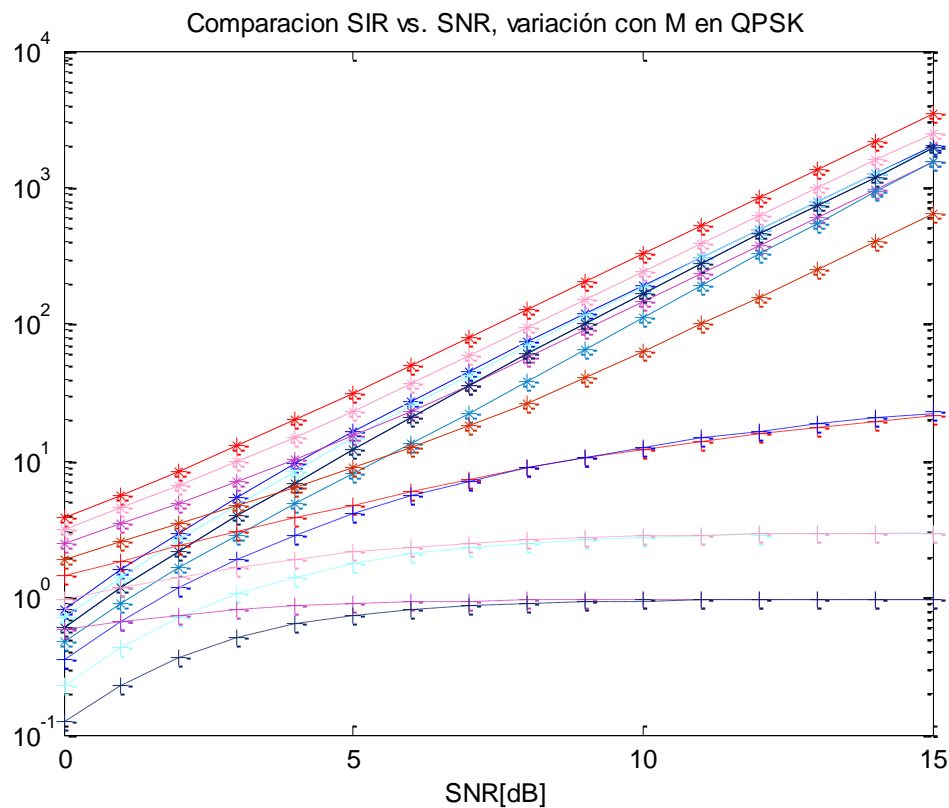


Ilustración 92 - Evolución de la SIR con el número de antenas (Wiener, QPSK)

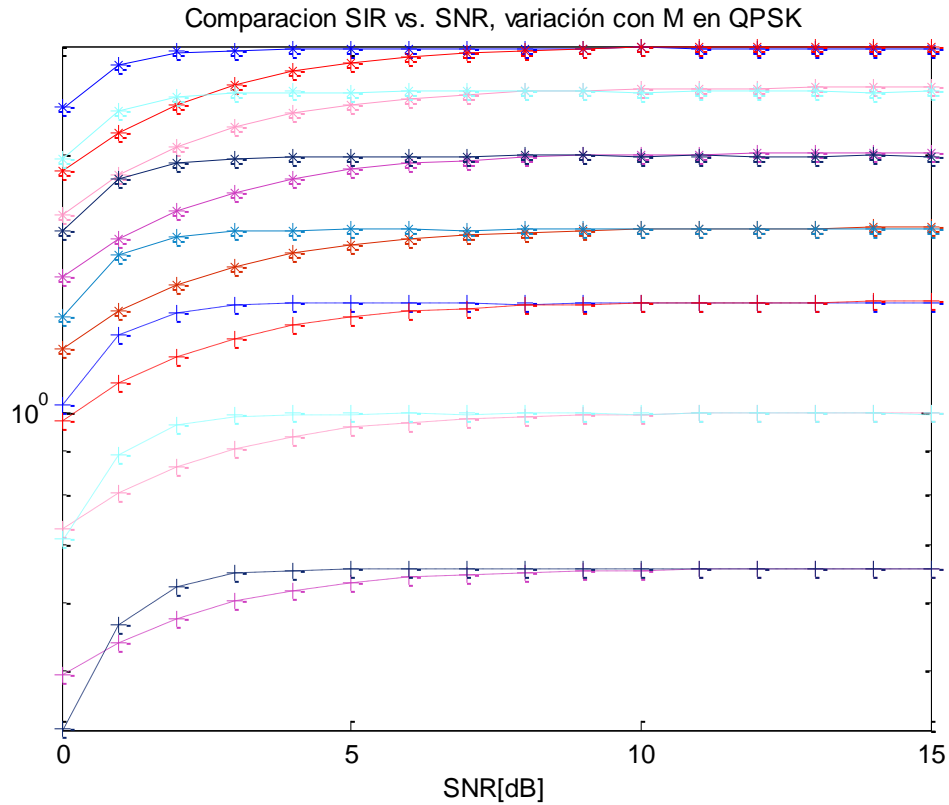


Ilustración 93 - Evolución de la SIR con el número de antenas (Matched Filter, QPSK)

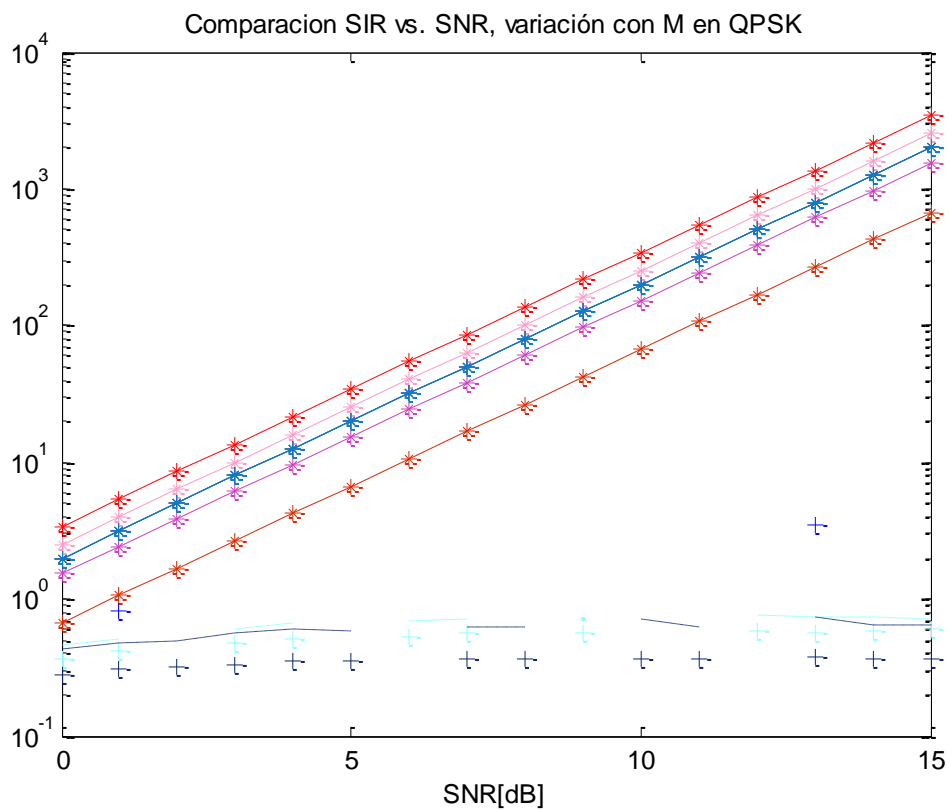


Ilustración 94 - Evolución de la SIR con el número de antenas (ZF, QPSK)



Como hicimos para BPSK, en las gráficas hemos representado la evolución de la SIR con el número de antenas, respetando la simbología utilizada. De este modo, representamos en tonalidades rojas los valores obtenidos al utilizar precodificación y en tonalidades azules los que se consiguen al usar decodificación en el sistema, con línea sólida el sentido convencional (W^{tx} usado en transmisión y W^{rx} en recepción) y con asteriscos el sentido inverso (W^{tx} usado en recepción y W^{rx} en transmisión).

A la vista de las gráficas, podemos decir que, salvo por que se presentan valores ligeramente menores en el caso de usar QPSK, las prestaciones en lo que a resistencia a la interferencia se refiere son iguales independientemente de que usemos una codificación u otra.



Conclusiones y Líneas Futuras

Conclusiones

El objetivo de este proyecto ha sido estudiar si, como exponen Joham, Utschick y Nossek en [12], a la hora de diseñar un sistema MIMO es equivalente utilizar filtros decodificadores en recepción o utilizar precodificación, partiendo de la base de que utilizamos los mismos criterios de diseño en ambos casos pero con una formulación adaptada para ser usada en cada configuración.

Este fenómeno sería muy importante a la hora de diseñar los sistemas de comunicación móvil ya que permitiría que concentráramos toda la complejidad de procesamiento de señal en las estaciones base, ya que utilizaríamos precodificación en el sentido descendente y decodificación en el sentido ascendente. Así se simplificaría el procesamiento que se llevaría a cabo en las estaciones móviles con lo que se podrían potenciar otras características de las mismas (al no tener que realizar el procesamiento que conlleva la decodificación de la información, las baterías de los terminales móviles durarían más en igualdad de capacidad o aumentarían su compatibilidad con las redes al ser transparentes a estos procesos) o, simplemente, reducir su coste.

A lo largo del estudio hemos trabajado con otros conceptos (información mutua y SIR), a parte de la tasa de error binaria tratada en la referencia [12], para poder analizar de forma más completa la posibilidad de que ambas configuraciones sean realmente duales. Así, al utilizar la información mutua y la relación señal a interferencia podemos comprobar si ambas configuraciones son equivalentes no sólo en la resistencia a los efectos del ruido inherente al canal, sino también en lo que al compromiso entre diversidad y multiplexado y a la fortaleza frente a la interferencia interusuario (que supone un factor imprescindible en un sistema MIMO). Otro factor importante para el diseño de un sistema multiusuario es el número de antenas del mismo y su relación con el número de usuarios, por lo que hemos estudiado el rendimiento para los casos de uso de precodificación y decodificación en distintas configuraciones y hemos evaluado la progresión del rendimiento de los sistemas para distintos número de antenas para un número fijo de usuarios.

Tras analizar los resultados obtenidos, podemos decir que el comportamiento de los sistemas MIMO multiusuario que usan decodificación o precodificación son realmente similares y que podrían llegar a suponerse equivalentes de cara a una comunicación pero que realmente no son duales.

Probabilidad de error

Los resultados que hemos obtenido para la probabilidad de error muestran que el uso de las dos configuraciones es prácticamente equivalente, obteniendo resultados muy parecidos en caso de usar BPSK y dando valores muy parejos en caso de usar QPSK. Para el caso de QPSK se puede observar un desplazamiento de algo menos de 1dB en el rendimiento cuando usamos precodificación (para el mismo valor de BER, la relación señal a ruido con la que lo obtenemos es menor al usar decodificación que al usar precodificación).



A la vista de las gráficas obtenidas podemos comprobar que el rendimiento del sistema reflejado como la probabilidad de error en función de la SNR depende directamente del factor $M - K$ puesto que cuanto mayor sea el número de antenas, mejores prestaciones tendrá el sistema y, sin embargo, aunque el número de antenas sea muy grande, si el número de usuarios es mayor que éste vamos a comprobar que el rendimiento cae. En estas situaciones, el sistema va a estar limitado por la interferencia del resto de usuarios y se va a ver saturado ya que, independientemente de la potencia que se entregue, los resultados no van a mejorar puesto que esa potencia se entrega para todos los usuarios y la interferencia de éstos va a ser igual de importante.

En lo que al criterio de diseño se refiere, el método de Wiener presenta mejores resultados para todas las configuraciones y todo valor de relación señal a ruido. El método de filtro adaptado, por lo general, es el que presenta peores valores, a pesar de que para baja relación señal a ruido, su rendimiento se asemeja al del filtro de Wiener. El método de forzado a cero muestra, por lo que se puede analizar de los resultados obtenidos, una gran sensibilidad al condicionamiento y, por ende, a la relación entre el número de antenas y usuarios del sistema. Esto se debe a que esta relación influye directamente en la invertibilidad de varios factores que componen la matriz procesado tanto para decodificación como para precodificación. Por tanto, para configuraciones en las que el número de antenas es mayor que el número de usuarios, el método de forzado a cero presenta un rendimiento normal, acercándose para valores altos de relación señal a ruido a los resultados obtenidos por el método de Wiener. Sin embargo, para configuraciones en las que el número de usuarios es mayor que el de antenas, el método ZF presenta un mal comportamiento independientemente de la relación señal a ruido en la que trabajemos.

Información mutua

Para la información mutua los resultados obtenidos son claramente opuestos a los de la probabilidad de error en lo que a dualidad se refiere ya que los valores que presentan el uso de precodificación y decodificación no siguen siquiera evoluciones similares. Con respecto a la modulación empleada, los resultados de información mutua también son prácticamente iguales al usar BPSK y QPSK como ocurría con los resultados de BER en función de la relación señal a ruido.

En lo que respecta a dependencias y evolución, la información mutua no depende de la diferencia entre el número de antenas y de usuarios del sistema, lo que podemos comprobar viendo que los valores obtenidos para las configuraciones 8×5 y 5×8 son equivalentes, mientras que los resultados para el sistema 8×8 eran mucho mayores que los obtenidos tanto en los dos sistemas anteriores como para la configuración 5×5 . Hemos observado que hay una dependencia directa con $\min(M, K)$ y que a su vez está relacionado con el número de autovalores no nulos de las matrices de correlación de las que depende la información mutua (35).

Los criterios de diseños empleados para definir los filtros presentan la misma relación en función de la relación señal a ruido, es decir, las informaciones mutuas de los métodos de filtro adaptado y Wiener son muy parejas para valores de SNR bajos mientras que los valores que son similares para alta relación señal a ruido son los de los métodos de forzado a cero y Wiener.



Comprobamos que la información mutua que obtenemos en caso de utilizar decodificación es la misma para todos los métodos mientras que no es así cuando usamos precodificación, esto se puede explicar directamente viendo la ecuación que define la información mutua (35), ya que, si atraviesan el mismo canal, las señales recibidas en el sistema en caso de usar decodificación son las mismas mientras que si utilizamos precodificación, las señales recibidas en el extremo remoto van a ser diferentes puesto que ya han sido precodificadas por los distintos filtros.

Relación señal a interferencia

La relación señal a interferencia está íntimamente relacionada con la probabilidad de error, ya que son las interferencias y el ruido, que conforman el denominador en (36), las causas de que se produzcan los errores en la detección de los símbolos en recepción. Por este motivo, podemos decir que las gráficas de la SIR en función de la relación señal a ruido pueden explicar el comportamiento de la probabilidad de error del sistema.

De este modo, si comprobamos las gráficas correspondientes a la relación señal a interferencia, podemos ver que para aquellas configuraciones en las que el número de antenas es mayor que el de usuarios, los rendimientos crecen de forma lineal y constante para los métodos de Wiener y de forzado a cero (métodos que para estas configuraciones no están limitados en probabilidad de error sino que la mejoran según va aumentando la potencia transmitida) mientras que para el filtro adaptado se satura la gráfica de SIR en el mismo entorno que lo hace para la probabilidad de error.

A su vez, en las configuraciones con $M < K$, todos los métodos se encuentran saturados en relación señal a interferencia según crece la relación señal a ruido (al igual que pasa con la probabilidad de error para los mismos valores de SNR) y podemos ver como el método de forzado a cero ve mermadas drásticamente sus prestaciones pasando a ser el peor método con diferencia debido a los problemas de condicionamiento que sufre para estas configuraciones.

Así pues, podemos decir que para las configuraciones con mayor número de antenas que de usuarios, el factor limitador es el ruido ya que no afecta de forma importante a los métodos de Wiener y ZF y su efecto disminuye con el aumento de la potencia; mientras que para las configuraciones con menor número de antenas que de usuarios es la interferencia multiusuario el factor limitador ya que influye en todos los métodos y no disminuye con la relación señal a ruido. Concluimos que, cuando estamos en un sistema con una configuración $M > K$, la ganancia que obtenemos está dirigida a la diversidad espacial consiguiendo así reducir el efecto de las interferencias multiusuario, gracias a que se establecen un mayor número de enlaces independientes para la transmisión de la información, razón por la que estos sistemas se encuentran principalmente limitados por el ruido y no por la interferencia como podría entenderse lógico al encontrarnos en un entorno multiusuario.



Líneas Futuras

Una vez realizado este estudio sobre la dualidad transmisión-recepción de los métodos lineales para un canal ideal como el que hemos simulado, para complementar el análisis que hemos llevado a cabo cabría la ampliación del análisis a los métodos óptimos (no lineales) que se han presentado en esta memoria (ML para decodificación y DPC para precodificación).

Para aumentar la fidelidad de los resultados que hemos obtenido, se podría trasladar la simulación a entornos más realistas en los que los usuarios no se encuentren todos a la misma distancia con las respectivas variaciones que presentaría el canal, reflejadas en los cambios que sufriría la matriz \mathbf{H} .

Otro aspecto muy importante de los sistemas MIMO que hemos presentado en esta memoria es el compromiso entre la diversidad y el multiplexado espacial que se lleva a cabo a la hora de diseñar este tipo de sistemas y que influye directamente en las características de los mismos. De esta forma, una posible línea futura sería llevar a cabo un análisis cuantitativo de este fenómeno para poder respaldar los comentarios cualitativos que se han realizado en este PFC.



Bibliografía

- [1] L. Zheng, D.N.C. Tse, “Diversity and multiplexing: a fundamental tradeoff in multiple-antenna channels”, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 49, pp. 1073-1096, Mayo 2003.
- [2] A. Goldsmith, “Wireless Communications”, Cambridge University Press, 2005.
- [3] E. Biglieri, A. Goldsmith and others, “MIMO Wireless Communications”, Cambridge University Press, 2007.
- [4] C. Windpassinger, “Detection and Precoding for Multiple Input Multiple Output Channels”, Doctor Thesis, Erlangen-Nürnberg (Alemania), Enero 2004.
- [5] S.A. Grandhi, R. D. Yates, D.J. Goodman, “Resource allocation for cellular radio systems”, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, pp. 581-587, Agosto 1997.
- [6] A. Scaglione, P. Stoica, S. Barbarossa, G.B. Giannakis, “Optimal designs for space-time linear precoders and decoders”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Mayo 2002.
- [7] S. Alamouti, “A simple transmit diversity technique for wireless communications”, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, pp. 1451-1458, Octubre 1998.
- [8] J. Sharony, “Introduction to Wireless MIMO – Theory and Applications”, comunicación privada, Stony Brooks University, Noviembre 2006.
- [9] N. Jindal, S. Vishwanath, A. J. Goldsmith, “On the duality of Gaussian multiple-access and broadcast channels”, *IEEE Transactions on Information Theory*, pp. 768-783, Mayo 2004.
- [10] S. Vishwanath, N. Jindal, A. J. Goldsmith, “Duality, achievable rates and sum-rate capacity of Gaussian MIMO broadcast channels”, *IEEE Transactions on Information Theory*, pp. 2658-2668, Octubre 2003.
- [11] P. Vishwanath, D. N. C Tse, “Sum capacity of the vector Gaussian broadcast channel and uplink-downlink duality”, *IEEE Transactions on Information Theory*, pp. 1912-1921, Agosto 2003.
- [12] M. Joham, W. Utschick, J. A. Nossek, “Linear Transmit Processing in MIMO Communications Systems”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, pp. 2700-2712, Agosto 2005.



- [13] P. S. Henry, B. S. Glance, "A new approach to high-capacity digital mobile radio", *Bell Systems Technology Journal*, pp. 1891-1904, Octubre 1981.
- [14] R. Esmailzadeh, M. Nakagawa, "Pre-RAKE diversity combination for direct sequence spread spectrum mobile communications systems", *IEICE Transactions on Communication*, pp. 1008-1015, Agosto 1993.
- [15] G. V. Tsoulos, M.A. Beach, "Calibration and linearity issues for an adaptive antenna system", *Proceedings VTC*, pp. 1597-1600, Mayo 1997.
- [16] Z. Tang, S. Cheng, "Interference cancellation for DS-CDMA systems over flat fading channels through pre-decorrelating", *Proceedings PIMRC*, pp. 435-438, Septiembre 1994.
- [17] H. Liu, G. Xu, "Multiuser blind channel estimation and spatial channel pre-equalization" *Proceedings ICASSP*, pp. 1756-1759, Mayo 1995.
- [18] B.R. Vojcic, W.M. Jang, "Transmitter precoding in synchronus multiuser communications", *IEEE Transactions on Communication*, pp. 1346-1355, Octubre 1998.
- [19] P. Forster, L. Féty, M. Le Bot, "Spatio-temporal filters for downlink processing in FDD systems", *Proceedings ICASSP*, pp. 2585-2588, Junio 2000.
- [20] C. Belfore, J. Park, "Decision feedback equalization", *IEEE Proceedings*, pp. 1143-1156, 1979.
- [21] M. Costa, "Writing on dirty paper", *IEEE Transactions on Information Theory*, pp. 439-441, Mayo 1983.
- [22] C. B. Peel, "Dirty paper coding", *IEEE Signal Processing*, pp. 112-113, Mayo 2003.
- [23] M. Tomlinson, "New automatic equalizer employing modulo arithmetic", *Electron*, pp. 138-139, Marzo 1971.
- [24] H. Harashima, H. Miyakawa, "Matched-transmission technique for channels with intersymbol interference", *IEEE Transactions on Communication*, pp. 774-780, Agosto 1972.
- [25] Z. A. Qureshi, "Robust Tomlinson Harashima Precoding with Imperfect CSI", Master of Science Thesis, Estocolmo (Suecia), Noviembre 2008.
- [26] M. Vu, A. Paulraj, "MIMO wireless linear precoding", *IEEE Signal Processing*, pp. 86-105, Septiembre 2007